Eine allgemeine Methode zur Gewinnung von Tests in der Regressionstheorie sowie bei mehrfach normal verteilten Zufallsgrößen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Dipl. Math., Dipl. Psych. Günter Zeglin

aus Berlin

1970

Eine allgemeine Methode zur Gewinnung von Tests in der Regressionstheorie sowie bei mehrfach normal verteilten Zufallsgrößen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Dipl. Math., Dipl. Psych. Günter Zeglin

aus Berlin

Referent: Prof. Dr. H. Münzner

Korreferent: Prof. Dr. Stöhr

Tag der mündlichen Prüfung: 12 Febr. 1969

Tag der Promotion: 9. FEB. 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Einleitung

Es wurden sämtliche Tests der Regressionstheorie nach einer allgemeinen Methode, die die Verteilungseigenschaften quadratischer Formen benutzt, hergeleitet. Rao's Idee (1965), bei ihrer numerischen Behandlung die Tests stets in der Form $\frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{\chi_2, \chi_1}$ zu benutzen, wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_o^2 diejenige ohne H_o bezeichnen, ist bei allen Tests angewandt worden, so daß mit dieser Arbeit auch dem Praktiker die Tests der Regressionstheorie zur Verfügung stehen. Eine Übersicht über die vielfältigen Tests und eine Formelsammlung sollen ihm dabei behilflich sein. Die dabei verwendeten Abkürzungen sind bei den zugehörigen Beweisen erklärt.

Nach derselben allgemeinen Methode kann man auch bei unabhängig mehrfach normal verteilten Zufallsgrößen Tests gewinnen. Eine ganze Serie solcher Tests wurde hergeleitet, von denen 3 spezielle in jedem statistischen Lehrbuch stehen: die Varianzanalyse bei einem Faktor, der t-Test zur Prüfung eines angenommenen Erwartungswertes und der t-Test zum Vergleich zweier unbekannter Erwartungswerte.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548809_0015

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

2. Statistische Lehrsätze S. 9

3. Tests der Regressionstheorie.

30. Zusammenstellung der Tests und Formelsammlung. S. 14

31. Regressionsmodelle der Art

$$Y_i \sim N_{n_i}(X_i\beta_i ; \sigma^2 \cdot I)$$

mit unabhängigen Y_i .

1. Prüfung angenommener Regressionskoeffizienten.

11. 1 Regressionsmodell.

111. Alle Parameter. S. 32

112. Nur einige Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 34

12. $k \geqslant 2$ Regressionsmodelle.

121. Alle Parameter. S. 43

122. Nur einige Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 49

2. Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten.

21. 2 Regressionsmodelle.

211. Alle Parameter. S. 56

212. Nur einige Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 62

22. $k \geqslant 2$ Regressionsmodelle.

221. Alle Parameter. S. 77

222. Nur einige Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 86

3. Prüfung der Trendänderung für zusätzliche Meßwerte.

31. 1 Modell, mehrere zusätzliche Meßwerte. S. 102

32. 1 Modell, nur ein zusätzlicher Meßwert. S. 110

4. Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten und zugleich Prüfung einer Trendänderung für zusätzliche Meßwerte bei mehreren Modellen. S.110

5. Rao's Test für ein System linearer Hypothesen. S.119
51. Herleitung des Rao'schen Tests. S.119
52. Herleitung der bisherigen Tests als Spezialfälle des Rao'schen Tests. S.123

32. Numerische Behandlung der wichtigsten Tests für die speziellen Modelle
$Y_i = \alpha + \gamma_1 x_{1i} + \ldots + \gamma_{p-1} x_{p-1,i} + e_i$
mit Dis $Y = \sigma^2 I$ und unabhängigen $Y_1, \ldots, Y_k$.

1. 1 Regressionsmodell.
11. Prüfung einer angenommenen Regressionshyperebene. S. 145
12. $H_o : \alpha = \alpha_o$, wobei α_o fest vorgegeben ist und die restlichen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben. S.147
13. $H_o : \gamma = \gamma_o$, wobei $\gamma_o' = (\gamma_{1o}, \ldots, \gamma_{qo})$ fest vorgegeben ist und α sowie die restlichen $\gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben; Spezialfall: q = p - 1. S. 148
14. Feststellen des Fehlens einer Assoziation zwischen y und $\mathcal{X}$, d.h. $H_o : \varrho_{y.\mathcal{X}} = 0$, also $\gamma = 0$. S.149
15. $H_o : \alpha = \alpha_o, (\gamma_1, \ldots, \gamma_q) = (\gamma_{1o}, \ldots, \gamma_{qo})$, wobei die restlichen $\gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben. S. 151
16. $H_o : \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{p-1}$, wobei α außer acht bleibt. S. 153
17. $H_o : \sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu \gamma_\nu = a$, wobei α außer acht bleibt. S.155

2. 2 Regressionsmodelle.
21. Die Prüfung der Gleichheit zweier Regressionshyperebenen. S. 156
22. $H_o : (\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}) = (\gamma_1', \ldots, \gamma_{p-1}')$ wobei α und α' außer acht bleiben. S. 159
23. $H_o : \alpha = \alpha'$, wobei alle restlichen γ_ν und γ_μ' außer acht bleiben. S. 161

24. $H_o : (\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_q) = (\alpha', \gamma_1', \ldots, \gamma_q')$
wobei alle restlichen γ_ν und γ_μ' außer acht bleiben. S. 163

25. $H_o : (\gamma_1, \ldots, \gamma_q) = (\gamma_1', \ldots, \gamma_q')$
wobei α ,α' und alle restlichen γ_ν und γ_μ' außer acht bleiben. S. 165

3. k⩾2 Regressionsmodelle. S. 167

4. Prüfung, Vergleich und lineare Hypothesen bei Erwartungswerten von unabhängigen Normalverteilungen mit Dispersionsmatrizen der Art

$$\text{Dis } Y = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I$$

40. Zusammenstellung der Tests und Formelsammlung. S. 167

41. Prüfung angenommener Erwartungswerte.

1. 1 Stichprobe.

11. Einfache Normalverteilung. S. 180

12. Mehrfache Normalverteilung.

121. Alle Erwartungswerte. S. 181

122. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 183

2. k⩾2 Stichproben.

21. Einfache Normalverteilungen. S. 184

22. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

221. Alle Erwartungswerte. S. 185

222. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 186

23. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

231. Alle Erwartungswerte. S. 187

232. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 188

42. Vergleich unbekannter Erwartungswerte.

1. Vergleich innerhalb der Stichproben. S. 189
11. 1 Stichprobe.
111. Alle Erwartungswerte. S. 189
112. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 189
113. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 194
12. $k \geqslant 2$ Stichproben.
121. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.
1211. Alle Erwartungswerte. S. 196
1212. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 197
1213. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 198
122. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.
1221. Alle Erwartungswerte. S. 200
1222. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 200
1223. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 201

2. Vergleich innerhalb der Stichproben.
21. 2 Stichproben.
211. Einfache Normalverteilungen. S. 201
212. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.
2121. Alle Erwartungswerte. S. 202
2122. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S. 203

213. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension. S.203
22. k≥2 Stichproben.
221. Einfache Normalverteilungen. S.206
222. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.
2221. Alle Erwartungswerte. S.206
2222. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S.207
2223. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S.213
223. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.
2231. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S.214
2232. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S.215

43. Lineare Hypothesen.

1. Prüfung angenommener Hypothesen.

11. Prüfung innerhalb der Stichproben.
111. 1 Stichprobe. S.215
112. k>2 Stichproben. S.217

12. Prüfung zwischen den Stichproben.
121. Einfache Normalverteilungen. S.218
122. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.
1221. Alle Erwartungswerte. S.219
1222. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben. S.220
123. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension. S.220

2. Prüfung angenommener Systeme von Hypothesen.

21. Systeme innerhalb der Stichproben.
211. 1 Stichprobe. S.222
212. $k \geqslant 2$ Stichproben. S.223

22. Systeme zwischen den Stichproben.
221. Einfache Normalverteilungen. S.224
222. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension. S.226
223. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension. S.227

5. Literaturverzeichnis. S.229

2. Statistische Lehrsätze.

Für den interessierten Praktiker möchten wir einige statistische und mathematische Lehrsätze ohne Beweise an den Anfang stellen. Einige von innen werden ihm nicht geläufig sein, so etwa die Verteilungseigenschaften quadratischer Formen. Wir werden diese Lehrsätze numerieren und später, wenn wir sie jeweils wieder anwenden, mit dieser Zahlenangabe auf sie verweisen. Die Beweise können etwa bei GRAYBILL, RAO und MOOD nachgelesen werden.

1. Im Regressionsmodell

$$Y \sim N_n(X\beta ; \sigma^2 \cdot I)$$

sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\hat{\beta} = S^{-1} X'Y \quad , \quad S = \text{Def } X' \cdot X \ ,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{R_0^2}{n-p} \quad , \quad R_0^2 = \min_{\beta} (Y - X\beta)' \cdot (Y - X\beta)$$
$$= (Y - X\hat{\beta})' \cdot (Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - \hat{\beta}' X' Y$$

Bei $\hat{\sigma}^2$ ist zur Korrektur ein konstanter Zahlenfaktor angebracht, damit es sich, ebenfalls wie bei $\hat{\beta}$, um eine biasfreie Schätzung handelt.

2. Es sind

$$\hat{\beta} \sim N_p(\beta ; \sigma^2 \cdot S^{-1}) \quad \text{und} \quad \frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$$

unabhängig verteilt.

3. $\quad Kov(m'Y , b'Y) = m' \cdot Dis Y \cdot b$

4. $\quad Var(m'Y) = m' \cdot Dis Y \cdot m$

5. Sind x_1 und x_2 unabhängig verteilt, so gilt dasselbe auch von $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$.

6. Reproduktionseigenschaft der zentralen und nicht- zentralen χ^2 - Verteilung: sind die

$$x_i \sim \chi'^2(p_i ; \lambda_i)$$

unabhängig verteilt, so ist auch ihre Summe nicht- zentral- χ^2 - verteilt, wobei sich die Parameter jeweils addieren: $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \sim \chi'^2(p_1 + \cdots + p_n ; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$

7. Sind $x \sim \chi'^2(p;\lambda)$ und $y \sim \chi^2(q)$ unabhängig

verteilt, so ist ihr Quotient nicht- zentral F- verteilt

$$\frac{q}{p} \cdot \frac{x}{y} \sim F'(p, q; \lambda)$$

8. Die nicht- zentrale F (p,q;λ)- Verteilung geht genau im Falle eines verschwindenden nicht- zentralen Parameters $\lambda = 0$ in die $F_{p,q}$- Verteilung über.

9. Es ist $t^2(x) \sim F_{1,x}$ verteilt.

10. Sind Y_1 und Y_2 beide mehrfach normal verteilt, so sind sie dann und nur dann unabhängig verteilt, wenn sie unkorreliert sind $\quad \mathrm{Kov}(Y_1, Y_2) = 0.$

11. Ist $Y \sim N_n(\mu; D)$ verteilt, so ist

$$A \cdot Y \sim N_z(A \cdot \mu; A \cdot D \cdot A')$$

verteilt, wobei z die Anzahl der Zeilen von A bezeichnet.

12. Sind $Y_1 \sim N_p(\mu_1; D_1)$ und $Y_2 \sim N_p(\mu_2; D_2)$ unabhängig verteilt, so ist

$$(Y_1 + Y_2) \sim N_p(\mu_1 + \mu_2; D_1 + D_2)$$

verteilt.

13. Ist $Y \sim N_n(\mu; \sigma^2 \cdot I)$ verteilt, dann sind im Falle $B \cdot A = 0$ das System linearer Formen $B \cdot Y$ und die quadratische Form $Y' \cdot A \cdot Y$ unabhängig verteilt. Speziell sind das empirische Mittel und die empirische Varianz unabhängig und identisch normal verteilter Zufallsgrößen unabhängig verteilt.

14. Ist $Y \sim N_n(\mu; \sigma^2 \cdot I)$ verteilt, so lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot Y' A Y \sim \chi'^2(r; \lambda)$$

verteilt sei:

1) $A^2 = A$,

2) r = Rang A, also r = Spur A;

in diesem Falle ist

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu' A \mu$$

15. Seien 1) $Y \sim N_n(\mu; \sigma^2 \cdot I)$

2) $\frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot A \cdot Y = \frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot B \cdot Y + \frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot C \cdot Y$

3) $\frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot A \cdot Y \sim \chi'^2(n_a; \lambda_a)$

4) $\frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot B \cdot Y \sim \chi'^2(n_b; \lambda_b)$

5) Y C Y positiv (semi-) definit;

dann gelten

1) $\frac{1}{\sigma^2} Y'C \cdot Y \sim \chi'^2(n_a - n_b; \lambda_a - \lambda_b)$

2) $\frac{1}{\sigma^2} Y'B \cdot Y$ und $\frac{1}{\sigma^2} Y'C \cdot Y$ sind unabhängig nicht-zentral χ^2- verteilt.

16. Sei $Y \sim N_n(\mu; D)$ verteilt, dann ist die quadratische Form $Y'A \cdot Y$ genau dann $\chi'^2(r; \lambda)$ verteilt, wenn

1) $A \cdot D \cdot A = A$

2) r = Rang A;

in diesem Falle ist

$$\lambda = \frac{1}{2} \mu' A \cdot \mu$$

17. Wenn $Y \sim N_n(\mu; D)$ verteilt ist und D^{-1} existiert, dann ist

$$(Y - \mu)' \cdot D^{-1} \cdot (Y - \mu) \sim \chi'^2(n; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2} (\mu - \mu)' \cdot D^{-1} \cdot (\mu - \mu).$$

18. Unter einer verallgemeinerten Inversen (g- Inverse) A^- der Matrix A versteht man irgendeine der unendlich vielen Matrizen, die die Gleichung

$$A A^- A = A$$

erfüllen. Im Falle einer quadratischen, nicht- singulären Matrix A gibt es genau eine g- Inverse, nämlich A^{-1}.

19. A und B seien nicht- singuläre Matrizen gleichen Typs, dann gelten

1) $A^{-1} (A^{-1} + B^{-1}) B^{-1} = (A + B)^{-1}$

2) $A^{-1} (A^{-1} + B^{-1}) A^{-1} = A^{-1} - (A + B)^{-1}$

20. $X \cdot (X \cdot X)^- X$ ist der Projektionsoperator, der in den Spaltenraum X projiziert.

21. Jeder Projektionsoperator ist symmetrisch und idempotent.

22. Die Spalten der Matrix H seien im Spaltenraum X enthalten, dann gibt es eine Matrix C mit der Eigenschaft

$$H = X \cdot C$$

23. Der Vektor η liegt genau dann im Spaltenraum X, wenn es einen Vektor μ mit der Eigenschaft $\eta = X \cdot \mu$ gibt.

24. Für idempotente Matrizen $A^2 = A$ gilt

$$\text{Rang A} = \text{Spur A}$$

25. Die Spur eines Produktes ändert sich nicht bei einer zyklischen Vertauschung der Faktoren

Spur $A \cdot B \cdot C$ = Spur $B \cdot C \cdot A$ = Spur $C \cdot A \cdot B$

26. Für alle Matrizen A und B gilt

$$\text{Rang } A' \cdot A \cdot B = \text{Rang } A \cdot B.$$

27. Ein lineares Gleichungssystem, dessen Zeilenanzahl gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix ist, ist lösbar.

28. Es gilt für alle Matrizen A

$$\text{Spaltenraum } A = \text{Spaltenraum } A \cdot A'$$

29. Jede positiv (semi-) definite Matrix A besitzt eine Zerlegung der Art

$$A = R' \cdot R$$

mit einer qudratischen Matrix R. Wenn A eigentlich positiv definit ist, dann ist R nicht- singulär.

30. Sind A und B eigentlich positiv definite Matrizen gleichen Typs, so ist auch (A + B) eigentlich positiv definit.

31. A sei eine eigentlich positiv definite Matrix, dann gilt dasselbe auch für

1) A^{-1}
2) jede Hauptuntermatrix C
3) C^{-1}

32. Die Matrix S sei in vier Untermatrizen aufgeteilt

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} , S_{12} \\ S_{21} , S_{22} \end{pmatrix}$$

wobei S_{11} quadratisch sei; möge S^{-1} existieren, dann läßt sich ja auch S^{-1} dementsprechend aufteilen

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} V_{11} , V_{12} \\ V_{21} , V_{22} \end{pmatrix}$$

Und es gelten zwischen den Untermatrizen u.a. folgende Beziehungen

1) $V_{21} V_{11}^{-1} V_{12} = V_{22} - S_{22}^{-1}$
2) $V_{11}^{-1} V_{12} = - S_{12} S_{22}^{-1}$

33. Es gilt für positiv definite Matrizen A

$$\min_{H'\varkappa = \Theta_0} \varkappa' A \varkappa = \Theta_0' \cdot (H' \cdot A^{-1} \cdot H)^{-} \cdot \Theta_0 ,$$

und das Minimum wird angenommen an der Stelle

$$\varkappa^* = A^{-1} H (H' \cdot A^{-1} H)^{-} \cdot \Theta_0$$

34. Sei $\underline{Y} \sim N_n(\underline{X}\beta ; \sigma^2 \cdot I)$ verteilt, dann lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$\frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot A \cdot Y \sim \chi'^2(\ldots; \ldots)$ und $\frac{1}{\sigma^2} Y' \cdot B \cdot Y \sim \chi'^2(..;..)$ unabhängig verteilt seien:

$$A \cdot B = 0.$$

3. Tests der Regressionstheorie.

30. Zusammenstellung der Tests und Formelsammlung.

Modelle $Y_\tau \sim N_{n_\tau}(X_\tau\beta_\tau ; \sigma^2 I)$ mit unabhängigen $Y_1, \ldots, Y_k$				
Trendänderung für zusätzliche Meßwerte	Mehrere Modelle			12
	1 Regressions-Modell	1 zusätzlicher Meßwert		11
		$n_2 < p$ zusätzliche Meßwerte		10
Systeme von linearen Hypothesen				9
Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten	$k \geq 2$ Regressions-Modelle	Nur einige Parameter		8
		Alle Parameter		7
	2 Regressions-Modelle	Nur einige Parameter		6
		Alle Parameter		5
Prüfung angenommener Regressionskoeffizienten	$k \geq 2$ Regressions-Modelle	Nur einige Parameter		4
		Alle Parameter		3
	1 Regressions-Modell	Nur einige Parameter		2
		Alle Parameter		1

Modelle: $\eta_i = \alpha + \gamma_1 x_{1i} + \cdots + \gamma_{p-1} x_{p-1,i} + e_i$ mit unabhängigen $Y_1, \ldots, Y_k$ Andere Schreibweise: $\gamma_\nu = \beta_\nu$

Prüfung angenommener Regressionskoeffizienten

$k \geq 2$ Regressionsmodelle	$H_0: \gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \cdots = \gamma_1^{(k)} = \gamma_{10}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_{p-1}^{(1)} = \gamma_{p-1}^{(2)} = \cdots = \gamma_{p-1}^{(k)} = \gamma_{p-1,0}$ alle restlichen $\alpha^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	35
	$H_0: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \cdots = \alpha^{(k)} = \alpha_0$ $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \cdots = \gamma_1^{(k)} = \gamma_{10}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_q^{(1)} = \gamma_q^{(2)} = \cdots = \gamma_q^{(k)} = \gamma_{q0}$ alle restlichen $\gamma_i^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	34
	$H_0: \gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \cdots = \gamma_1^{(k)} = \gamma_{10}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_q^{(1)} = \gamma_q^{(2)} = \cdots = \gamma_q^{(k)} = \gamma_{q0}$ alle restlichen $\alpha^{(\nu)}$, $\gamma_i^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	33
	$H_0: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \cdots = \alpha^{(k)} = \alpha_0$ alle restlichen $\gamma_i^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	32
	$H_0: \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \cdots = \alpha^{(k)} = \alpha_0$ $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \cdots = \gamma_1^{(k)} = \gamma_{10}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_{p-1}^{(1)} = \gamma_{p-1}^{(2)} = \cdots = \gamma_{p-1}^{(k)} = \gamma_{p-1,0}$	31
1 Regressionsmodell	$H_0: \sum_{\nu=1}^{p-1} a_\nu \beta_\nu = \alpha$; α bleibt außer acht.	20
	$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{p-1}$; α bleibt außer acht.	19
	$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{p-1} = \beta^*$; α bleibt außer acht.	18
	$H_0:$ $\alpha = \alpha_0$, $\beta_1 = \beta_{10}$, $\vdots$, $\beta_q = \beta_{q0}$; $\beta_{q+1}, \ldots, \beta_{p-1}$ bleiben außer acht.	17
	$H_0:$ $\beta_1 = \beta_{10}$, $\vdots$, $\beta_{p-1} = \beta_{p-1,0}$; α bleibt außer acht.	16
	$H_0:$ $\beta_1 = \beta_{10}$, $\vdots$, $\beta_q = \beta_{q0}$; $\alpha, \beta_{q+1}, \ldots, \beta_{p-1}$ bleiben außer acht.	15
	$H_0: \alpha = \alpha_0$; $\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ bleiben außer acht.	14
	$H_0: \alpha = \alpha_0, \beta_1 = \beta_{10}, \ldots, \beta_{p-1} = \beta_{p-1,0}$	13

Modelle: $\eta_i = \alpha + \gamma_1 x_{1i} + \ldots + \gamma_{p-1} x_{p-1,i} + e_i$ mit unabhängigen $Y_1, \ldots, Y_k$ Andere Schreibweise: $\gamma_\nu = \beta_\nu$

Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten

2 Regressionsmodelle

$k \geqslant 2$ Regressionsmodelle

H_0:	$\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \ldots = \gamma_1^{(k)}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_q^{(1)} = \gamma_q^{(2)} = \ldots = \gamma_q^{(k)}$	alle restlichen $\alpha^{(\nu)}, \gamma_i^{(\nu)}$ bleiben außer acht	30
H_0:	$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots = \alpha^{(k)}$ $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \ldots = \gamma_1^{(k)}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_q^{(1)} = \gamma_q^{(2)} = \ldots = \gamma_q^{(k)}$	alle restlichen $\gamma_i^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	29
H_0:	$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots = \alpha^{(k)}$ $\gamma_i^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	alle restlichen	28
H_0:	$\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \ldots = \gamma_1^{(k)}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_{p-1}^{(1)} = \gamma_{p-1}^{(2)} = \ldots = \gamma_{p-1}^{(k)}$	alle restlichen $\alpha^{(\nu)}$ bleiben außer acht.	27
H_0:	$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots = \alpha^{(k)}$ $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \ldots = \gamma_1^{(k)}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $\gamma_{p-1}^{(1)} = \gamma_{p-1}^{(2)} = \ldots = \gamma_{p-1}^{(k)}$		26
H_0:	$\beta_1 = \beta_1'$ $\vdots$ $\beta_q = \beta_q'$	alle restlichen $\alpha, \alpha', \beta_\nu, \beta_\nu'$ bleiben außer acht.	25
H_0:	$\alpha = \alpha'$ $\beta_1 = \beta_1'$ $\vdots$ $\beta_q = \beta_q'$	alle restlichen β_ν, β_ν' bleiben außer acht.	24
H_0:	$\alpha = \alpha'$	alle restlichen β_ν, β_ν' bleiben außer acht.	23
H_0:	$\beta_1 = \beta_1'$ $\vdots$ $\beta_{p-1} = \beta_{p-1}'$	α und α' bleiben außer acht.	22
H_0:	$\alpha = \alpha', \beta_1 = \beta_1', \ldots, \beta_{p-1} = \beta_{p-1}'$		21

1) $H_o: \beta = \beta^*$

Test: $\dfrac{n-p}{p} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{p,\, n-p}$

$R_1^2 - R_o^2 = (\hat{\beta} - \beta^*)' S (\hat{\beta} - \beta^*)$, $R_o^2 = Y'Y - \hat{\beta}' X'Y$

2) a. $H_o: \gamma = \gamma^*$

Test: $\dfrac{n-p}{q} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{q,\, n-p}$

R_o^2 vgl. 1)

$R_1^2 - R_o^2 = (\hat{\gamma} - \gamma^*)' Z' [I - W (W'W)^{-1} W'] Z (\hat{\gamma} - \gamma^*)$

$= (\hat{\gamma} - \gamma^*)' V^{-1} (\hat{\gamma} - \gamma^*)$

b. $H_o: \gamma = 0$

Test: $\dfrac{n-p}{q} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{q,\, n-p}$

R_o^2 vgl. 1). $R_1^2 - R_o^2 = \hat{\beta}' X' Y - \hat{\delta}_o' W' Y$

3) $H_o: \beta_1 = \beta^*, \ldots, \beta_k = \beta^*$.

Test: $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\,p}{k\,p} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{k\cdot p,\, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}$

$R_o^2 = \sum_{i=1}^{k} R_{oi}^2$, $R_1^2 - R_o^2 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*)$

4) a. $H_o: \gamma_1 = \gamma^*, \ldots, \gamma_k = \gamma^*$.

Test: $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{k\cdot q} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{k\cdot q,\, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}$

R_o^2 vgl. 3)

$R_1^2 - R_o^2 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)' Z_i' \left[I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i' \right] Z_i (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)$

$= \sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{io} \end{pmatrix} \right]' J_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{io} \end{pmatrix} \right]$

$= \sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)$

b. $H_o: \gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_k = 0$.

Test: $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{k\cdot q} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{k\cdot q,\, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}$

R_o^2 vgl. 3)

$$R_1^2 - R_o^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\hat{\beta}_i' \cdot X_i' Y_i - \hat{\delta}_{io}' \cdot W_i' Y_i \right)$$

5) H_o: $\beta_1 = \beta_2$.

$$\text{Test: } \frac{n_1 + n_2 - 2 \cdot p}{p} \cdot \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{p,\, n_1 + n_2 - 2 \cdot p}$$

$$R_o^2 = \sum_{i=1}^{2} R_{oi}^2$$

$$R_1^2 - R_o^2 = (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)' (S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})$$

6) H_o: $\gamma_1 = \gamma_2$

$$\text{Test: } \frac{n_1 + n_2 - 2 \cdot p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{q,\, n_1 + n_2 - 2 \cdot p}$$

R_o^2 vgl. 5)

$$R_1^2 - R_o^2 = (\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)' (V_1 + V_2)^{-1} (\quad_1 - \quad_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' Z_i' [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i (\ldots)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{io\,tot} \end{pmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{io\,tot} \end{pmatrix} \right]$$

7) H_o: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$

$$\text{Test: } \frac{N - k \cdot p}{(k - 1) p} \cdot \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{(k-1) \cdot p,\, N - k \cdot p}$$

R_o^2 vgl. 3). $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

$$R_1^2 - R_o^2 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \end{pmatrix}' \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} S_1^{-1} + S_2^{-1}, & \ldots, & S_1^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^{-1} & \ldots, & S_1^{-1} + S_k^{-1} \end{pmatrix}$$

8) H_o: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$

Test: $\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i - k \cdot p}{(k-1)q} \cdot \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F(k-1)q,\ N - k \cdot p$

R_o^2 vgl. 3)

$$R_1^2 - R_o^2 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' Z_i' [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i(.)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{i\,tot} \end{pmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{i\,tot} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_k \end{pmatrix}' \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} V_1 + V_2, & \dots, & V_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1, & \dots, & V_1 + V_k \end{pmatrix}$$

9) H_o: $H'\beta = \theta_o$.

Typ H' = (k, ...); die Zeilen von H' können o.B.d.A. als linear unabhängig angesehen werden; setze $\hat{\theta} =_{Def} H'\hat{\beta}$

Test: $\frac{n - p}{k} \cdot \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{k,\ n-p}$

R_o^2 vgl. 1)

$$R_1^2 - R_o^2 = (\hat{\theta} - \theta_o)' (H' S^{-1} H)^{-1} (\hat{\theta} - \theta_o)$$

10) H_o: $X_2 \beta_2 = X_2 \beta_1$, wobei $n_2 < p$.

Test: $\frac{n_1 - p}{n_2} \quad \frac{R_1^2 - R_o^2}{R_o^2} \sim F_{n_2,\ n_1 - p}$

$$R_o^2 = Y_1' Y_1 - \hat{\beta}_1' \cdot X_1' Y_1$$

$$R_1^2 - R_o^2 = (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})' (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})$$

$$= (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_1)' (I + X_2 S_1^{-1} X_2')^{-1} (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_1)$$

11) H_o: $\mathfrak{x}_o' \cdot \beta_2 = \mathfrak{x}_o' \cdot \beta_1$

Test: $\frac{n_1 - p}{1} \cdot \frac{(y - \mathfrak{x}_0' \hat{\beta}_1)^2}{R_{01}^2 \cdot [1 + \mathfrak{x}_0' S_1^{-1} \mathfrak{x}_0]} \sim F_{1, n_1 - p}$

Beim Modell: $y_i = \alpha + \gamma_1 x_{i1} + \ldots + \gamma_{p-1} x_{i,p-1} + e_i$

gilt speziell $1 + \mathfrak{x}_0' S_1^{-1} \mathfrak{x}_0 = 1 + \frac{1}{n} + (\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}})' \cdot C' \cdot (\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}})$

mit $C' = \text{Dis}\, \mathfrak{x}$

12) H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$

$$X_{k+1} \beta_{k+1} = X_{k+1} \beta_1, \quad n_{k+1} < p,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$X_{k+1} \beta_{k+1} = X_{k+1} \beta_1, \quad n_{k+1} < p$$

Test: $\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{\sum_{i=1}^{k} n_{k+1} + (k-1) \cdot p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{\sum_{i=1}^{k} n_{k+1} + (k-1)p,\ \sum_{1}^{k} n_i - kp}$

R_0^2 = vgl. 3)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=k+1}^{k+1} (Y_i - X_i \hat{\beta}_{tot})' (Y_i - X_i \hat{\beta}_{tot})$$

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{1} Y_{k+1}' Y_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i' X_i' Y_i - \hat{\beta}_{tot}' X_{tot}' Y_{tot}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_1 \\ Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}' \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_1 \\ Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (S_1^{-1} + S_2^{-1}) \ldots S_1^{-1} & , & S_1^{-1} X_{k+1}' \ldots S_1^{-1} X_{k+1}' \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^{-1} \ldots (S_1^{-1} + S_k^{-1}), & S_1^{-1} X_{k+1}' \ldots S_1^{-1} X_{k+1}' \\ X_{k+1} S_1^{-1} \ldots X_{k+1} S_1^{-1} & , & (I + X_{k+1} S_1^{-1} X_{k+1}') \ldots X_{k+1} S_1^{-1} X_{k+1}' \\ \vdots & & \vdots \\ X_{k+1} S_1^{-1} \ldots X_{k+1} S_1^{-1} & , & X_{k+1} S_1^{-1} X_{k+1}' \ldots (I + X_{k+1} S_1^{-1} X_{k+1}') \end{pmatrix}$$

13) Test: $\frac{n-p}{p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p, n-p}$

$$R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_{1\cdot})(y_i - \bar{y}) - \ldots - \hat{\beta}_{p-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{p-1,i} - \bar{x}_{p-1,\cdot})(y_i - \bar{y})$$

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \alpha_0 - \beta_{10} x_{1i} - \ldots - \beta_{p-1,0} x_{p-1,i}]^2 - \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - x_{1\cdot})(y_i - \bar{y}) + \ldots + \hat{\beta}_{p-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{p-1,i} - \bar{x}_{p-1,\cdot})(y_i - \bar{y})$$

14) Test: $\frac{n-p}{1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{1, n-p}$

R_0^2 = vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})(y_i - \bar{y}) - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_{k,0} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \cdot (y_i - \alpha_0)$$

15) Test: $\frac{n-p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\, n-p}$

$R_0^2 =$ vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{y}) - \beta_{10}(x_{11} - \bar{x}_{1\cdot}) - \ldots - \beta_{q0}(x_{q1} - \bar{x}_{q0})]^2$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{k\cdot})(y_i - \bar{y})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\beta}_{k\cdot 0} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}) [(y_i - \bar{y}) - \beta_{10}(x_{1i} - \bar{x}_{1\cdot}) \ldots - \beta_{q0}(x_{qi} - \bar{x}_{q\cdot})]$$

16)

a) allgemeiner Fall

Test: $\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p-1,\, n-p}$

$R_0^2 =$ vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{y}) - \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{k0}(x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})]^2 - \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})(y_i - \bar{y})$$

b) Spezialfall

$\beta_1 = 0$

H_0: . . . $\rightsquigarrow$ H_0: $\rho_{y \cdot \varrho} = 0$

$\beta_{p-1} = 0$

Test: $\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\hat{\rho}^2_{y \cdot \varrho}}{1 - \hat{\rho}^2_{y \cdot \varrho}} \sim F_{p-1,\, n-p}$

$$\hat{\varrho}^2_{y\cdot\varphi} = \frac{\hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_{1\cdot})(y_i - \bar{y}) + \ldots + \hat{\beta}_{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{p-1,i} - \bar{x}_{p-1,\cdot})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

einfacher so : in Formel a) alle $\beta_{k0} = 0$ setzen.

17) Test: $\frac{n - p}{q + 1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q+1,\, n-p}$

$R_0^2 =$ vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \alpha_0 - \beta_{10} x_{1i} - \ldots - \beta_{q0} x_{qi}]^2$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})(y_i - \bar{y})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\beta}_{k0} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \cdot (y_i - \alpha_0 - \beta_{10} x_{1i} - \ldots - \beta_{q0} x_{qi})$$

18) Test: $\frac{n - p}{p - 1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p-1,\, n-p}$

$R_0^2 =$ vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{y}) - \beta \sum_{k=1}^{*p-1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})]^2 - \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})(y_i - \bar{y})$$

19) Test: $\frac{n - p}{p - 2} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p-2,\, n-p}$

$R_0^2 =$ vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})(y_i - \bar{y}) - \frac{[\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_{\cdot i} - (p-1)\bar{x}_{\cdot\cdot})(y_i - \bar{y})]^2}{\sum_{i=1}^{n} [\bar{x}_{\cdot i} - (p-1)\bar{x}_{\cdot\cdot}]^2}$$

20) Test: $\frac{n - p}{1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{1,\, n-p}$

R_0^2 = vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \frac{\left[\sum_{k=1}^{p-1} a_k \hat{\beta}_k - a\right]^2}{(o, \mathfrak{w}')\, S^{-1} \begin{pmatrix} o \\ \mathfrak{w} \end{pmatrix}}$$

21) Test: $\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p,\, n_1 + n_2 - 2p}$

$R_0^2 = R_{01}^2 + R_{02}^2$, R_{01}^2 vgl. 13)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\beta}_k^{(1)} - \hat{\beta}_{k,tot}) \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)})(y_i - \bar{y}^{(1)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_{k,tot}) \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})(y_i - \bar{y}^{(2)})$$

$$+ \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)}) \left[\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_{k,tot} (\bar{x}_{k\cdot}^{(1)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})\right]$$

22) Test: $\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p - 1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p-1,\, n_1 + n_2 - 2p}$

R_0^2 = vgl. 21)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\beta}_k^{(1)} - \hat{\beta}_{k,tot}) \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(1)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_{k,tot}) \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(2)})$$

23) Test: $\frac{n_1 + n_2 - 2p}{1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{1,\, n_1 + n_2 - 2p}$

R_0^2 = vgl. 21)

$$R_1^2 - R_0^2 = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(1)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k^{(2)} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(2)})$$

$$- \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^{*} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_{ki}^{(1)} \cdot (y_i - \bar{y}^{tot})$$

$$- \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^{*} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{ki}^{(2)} \cdot (y_i - \bar{y}^{tot})$$

24) Test: $\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q + 1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q+1,\, n_1+n_2-2p}$

R_0^2 = vgl. 21)

$$R_1^2 - R_0^2 = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}) (y_i - \bar{y}^{(1)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k^{(2)} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(2)})$$

$$- \sum_{k=1}^{q} \hat{\beta}_{k,tot} \cdot \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(tot)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\beta}_{k,tot}^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_{ki}^{(1)} \cdot (y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\beta}_{k,tot}^{(2)} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{ki}^{(2)} \cdot (y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

25) Test: $\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\, n_1+n_2-2p}$

R_0^2 = vgl. 21)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(1)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\beta}_k^{(2)} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$- \sum_{k=1}^{q} \hat{\beta}_{k,tot} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(1)}) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(2)}) \right]$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\beta}_{k,tot}^{(1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(1)})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\beta}_{k,tot}^{(2)} \cdot \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}) \cdot (y_i - \bar{y}^{(2)})$$

26) Test: $\frac{N - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{(k-1)\cdot p,\, N - k \cdot p}$

$$R_0^2 = \sum_{T=1}^{k} S_{00}^{(T)} - \sum_{T=1}^{k} \sum_{v=1}^{p-1} \hat{\gamma}_v^{(T)} \cdot S_{v0}^{(T)}$$

$$R_1^2 = S_{00}^{(tot)} - \sum_{v=1}^{p-1} \hat{\gamma}_v^{*} \cdot S_{v0}^{(tot)}$$

Die $\hat{\gamma}_1^{*}, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}^{*}$ sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1^{*} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{p-1}^{*} \end{vmatrix} + e$$

27) Test: $\frac{N - k \cdot p}{(k-1) \cdot (p-1)} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{(k-1) \cdot (p-1),\, N - k \cdot p}$

R_0^2 = vgl. 26)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{p-1} (\hat{\gamma}_\nu^{(\tau)} - \hat{\gamma}_\nu^{*}) \cdot S_{\nu 0}^{(\tau)}$$

Die $\hat{\gamma}_1^*, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}^*$ berechnen sich aus den folgenden Normalgleichungen

$$\sum_{\tau=1}^{k} S_{10}^{(\tau)} - \sum_{\nu=1}^{p-1} \hat{\gamma}_\nu^* \cdot \sum_{\tau=1}^{k} S_{\nu 1}^{(\tau)} = 0\,;\ i = 1, \ldots, p-1$$

28) Test: $\frac{N - k \cdot p}{(k-1) \cdot 1} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k-1,\, N - k \cdot p}$

$$R_1^2 = S_{00}^{(tot)} - \sum_{\nu=1}^{p-1} \sum_{\tau=1}^{k} \hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*} \cdot \sum_{i=1}^{n_\tau} x_{\nu 1}^{(\tau)} \cdot (y_1^{(\tau)} - \bar{y}^{(tot)})$$

R_0^2 = vgl. 26)

Die $\ldots, \hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*}, \ldots$ sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{X}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{X}_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{p-1}^* \end{vmatrix} + e\,,\ \gamma_1^* = \begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)*} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{p-1}^{(1)*} \end{vmatrix}$$

29) Test: $\frac{N - k \cdot p}{(k-1) \cdot (q+1)} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{(k-1) \cdot (q+1),\, N-k \cdot p}$

R_0^2 = vgl. 26)

$$R_1^2 = S_{00}^{(tot)} - \sum_{\nu=1}^{q} \hat{\gamma}_\nu^* \cdot S_{\nu 0}^{(tot)}$$

$$- \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*} \cdot \sum_{i=1}^{n_\tau} x_{\nu i}^{(\tau)} \cdot (y_i^{(\tau)} - y^{(tot)})$$

Die $\ldots, \hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*}, \ldots$ sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & W_1 & & O \\ \cdot & & \ddots & \\ \cdot & & & \ddots \\ \cdot & & & \\ Z_k & O & & W_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon_k \end{pmatrix} + e$$

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \gamma_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_q^* \end{pmatrix}, \quad \epsilon_i = \begin{pmatrix} \gamma_{q+1}^{(i)*} \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{p-1}^{(i)*} \end{pmatrix}$$

30) Test: $\dfrac{N - k \cdot p}{(k-1) \cdot q} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{(k-1)\cdot q,\, N - k \cdot p}$

R_0^2 = vgl. 26)

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{q} (\hat{\gamma}_\nu^{(\tau)} - \hat{\gamma}_\nu^*) S_{\nu 0}^{(\tau)} + \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=q+1}^{p-1} (\hat{\gamma}_\nu^{(\tau)} - \hat{\gamma}_\nu^*) S_{\nu 0}^{(\tau)}$$

Die $\hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*}$ sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\delta = \begin{vmatrix} \gamma_1 * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_q * \end{vmatrix}, \quad \epsilon_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{q+1}^{(1)} * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{p-1}^{(1)} * \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,0 & 0 & & & \\ \cdot\,\cdot & \cdot & & & \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & & & \\ \cdot\,\cdot & \cdot & , \; Z_1 , & W_1 & \\ 1\,0 & 0 & & & \ddots \\ & \cdot & & \cdot & \ddots \\ & \cdot & & \cdot & \ddots \\ & \cdot & & \cdot & \ddots \\ 0\,0 & 1 & & & 0 \\ \cdot\,\cdot & \cdot & & & \ddots \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & & & \ddots \\ \cdot\,\cdot & \cdot & , \; Z_k & & W_k \\ 0\,0 & 1 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha^{(k)} \\ \\ \delta \\ \epsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon_k \end{vmatrix} + e$$

31) Test: $\dfrac{N - k \cdot p}{k \cdot p} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k \cdot p,\, N - k \cdot p}$

$$R_0^2 = \sum_{\tau=1}^{k} S_{00}^{(\tau)} - \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{v=1}^{p-1} \hat{\gamma}_v^{(\tau)} \, S_{v0}^{(\tau)}$$

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1 + \ldots + n_k} (y_1 - \alpha_0 - \gamma_{10} \, x_{11} - \ldots - \gamma_{p-1,0} \, x_{p-1,1})^2$$

32) Test: $\dfrac{N - k \cdot p}{k} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k,\, N - k \cdot p}$

R_0^2 = vgl. 31)

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_1 - \alpha_0)^2 - \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{v=1}^{p-1} \hat{\gamma}_v^{(\tau)} * \cdot \sum_{i=1}^{n_\tau} x_{vi}^{(\tau)} \cdot (y_1^{(\tau)} - \alpha_0)$$

Die $\hat{\gamma}_v^{(\tau)*}$ sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\begin{pmatrix} Y_1 - \begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{vmatrix} \\ \vdots \\ Y_k - \begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^{(1)*} \\ \vdots \\ \gamma^{(k)*} \end{pmatrix} + e$$

$$\gamma^{(1)*} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)*} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1}^{(1)*} \end{pmatrix}$$

Test: $\dfrac{N - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k \cdot q,\, N - k \cdot p}$

R_0^2 = vgl. 31)

$$R_1^2 = \sum_{\tau=1}^{k} S_{00}^{(\tau)*} - \sum_{v=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_v^{(\tau)*} \cdot S_{v0}^{(\tau)*}$$

$$S_{00}^{(\tau)*} = \sum_{i=1}^{n_\tau} \left[(y_i^{(\tau)} - \bar{y}^{(\tau)}) - \sum_{v=1}^{q} \gamma_{v0} \, (x_{vi}^{(\tau)} - \bar{x}_{v0}^{(\tau)}) \right]^2$$

$$S_{v0}^{(\tau)*} = \sum_{i=1}^{n_\tau} (x_{vi}^{(\tau)} - \bar{x}_{v\cdot}^{(\tau)}) \cdot \left[(y_i^{(\tau)} - \bar{y}^{(\tau)}) - \sum_{\rho=1}^{q} \gamma_{\rho 0} (x_{\rho i}^{(\tau)} - \bar{x}_{\rho\cdot}^{(\tau)} \right]$$

Die $\hat{\gamma}_v^{(\tau)*}$ sind die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\begin{vmatrix} Y_1 - Z_1\,\gamma^{(0)} \\ \vdots \\ Y_k - Z_k\,\gamma^{(0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}, W_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{matrix} & 0 \\ \cdot & \\ 0 & \end{matrix} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}, W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta^{(1)*} \\ \vdots \\ \delta^{(k)*} \end{vmatrix} + e$$

$$\gamma^{(0)} = \begin{vmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{q0} \end{vmatrix}, \quad \delta^{(1)*} = \begin{vmatrix} \alpha^{(1)*} \\ \gamma^{(1)*}_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma^{(1)*}_{p-1} \end{vmatrix}, \quad Y_1 = Z_1\,\gamma^{(0)} + \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}, W_1 \end{vmatrix} \delta^{(1)}_k + e_1$$

34) Test: $\dfrac{N - k \cdot p}{k \cdot (q+1)} \cdot \dfrac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k\,\cdot\,(q+1),\; N - k \cdot p}$

R_0^2 = vgl. 31)

$$R_1^2 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_\tau} \left[y_1^{(\tau)} - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}\, x_{\nu 1}^{(\tau)} \right]^2$$

$$- \sum_{\nu=q+1}^{p-1} \left[\hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*} \cdot \sum_{i=1}^{n_\tau} x_{\nu 1}^{(\tau)} \cdot \left(y_1^{(\tau)} - \alpha_0 - \sum_{\rho=1}^{q} \gamma_{\rho 0}\, x_{\rho 1}^{(\tau)} \right) \right]$$

Dabei sind die $\hat{\gamma}_\nu^{(\tau)*}$ die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate beim "reduzierten" Modell (unter H_0)

$$\begin{vmatrix} Y_1 - Z_1 \cdot \delta^{(0)} \\ \vdots \\ Y_k - Z_k \cdot \delta^{(0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon^{(1)*} \\ \vdots \\ \epsilon^{(k)*} \end{vmatrix} + e\,,$$

$$\delta^{(0)} = \begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \gamma_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{q0} \end{vmatrix} \quad , \quad \epsilon^{(1)*} = \begin{vmatrix} \gamma_{q+1}^{(1)*} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{p-1}^{(1)*} \end{vmatrix}$$

35) Test: $\frac{N - k \cdot p}{k \cdot (p-1)} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k \cdot (p-1),\, N - k \cdot p}$

$$R_1^2 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_\tau} \left[(y_i^{(\tau)} - \bar{y}^{(\tau)}) - \sum_{\nu=1}^{p-1} \gamma_{\nu 0} \, (x_{\nu i}^{(\tau)} - \bar{x}_{\nu \cdot}^{(\tau)}) \right]^2$$

R_0^2 = vgl. 31)

31. REGRESSIONSMODELLE DER ART $Y_1 \sim N_{n1}(X_1 \beta_1 ; \sigma^2 \cdot I)$ MIT UNABHÄNGIGEN Y_1

311. Prüfung angenommener Regressionskoeffizienten

3111. 1 Regressionsmodell

31111. Prüfung aller Parameter

Im Regressionsmodell $Y \sim N_n (X \cdot \beta ; \sigma^2 \cdot I)$, Typ $X = (n , p)$, $n > p$, Rang $X = p$, soll die Nullhypothese

H_0: $\beta = \beta_0$, wobei der Vektor β_0 fest vorgegeben ist,

geprüft werden. Wir können den Test so finden.

$\hat{\beta} = S^{-1} X'Y$ ist (2)

$$\hat{\beta} \sim N_p (\beta ; \sigma^2 \cdot S^{-1})$$

verteilt, also ist (17)

$Q =_{Def} \frac{1}{\sigma^2} \cdot (\hat{\beta} - \beta_0)' S (\hat{\beta} - \beta_0) \sim \chi'^2 (p; \lambda)$

verteilt, wobei $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \beta_0)' S (\beta - \beta_0)$.

Es ist $(n-p) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 (n-p)$ unabhängig (2) von $\hat{\beta}$ und somit (5) unabhängig von Q verteilt. S ist eigentlich positiv definit, also λ genau dann gleich 0, wenn $\beta = \beta_0$. Somit (7) ist $\frac{n-p}{p} \cdot \frac{Q}{R_0^2/\sigma^2} \sim F'(p, n-p; \lambda)$ verteilt, also genau dann (8) $F_{p, n-p}$ verteilt, wenn die Nullhypothese gültig ist. Insgesamt ist folgender Test bewiesen.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \beta = \beta_0$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)' S (\hat{\beta} - \beta_0)}{R_0^2} \sim F_{p, n-p}$$

verteilt ist.

Dieser Test liefert unmittelbar einen mehrdimensionalen Vertrauensbereich für den Erwartungsvektor β; dabei handelt es sich um das Innere eines p - dimensionalen Ellipsoids.

Der Test läßt eine Deutung zu, die ein für die Regressionstheorie allgemeingültiges Testprinzip liefert. Dazu formen wir den Test um.

$$\begin{aligned}
Q &= (\hat{\beta} - \beta_0)' S (\hat{\beta} - \beta_0) \\
&= \hat{\beta}' S \hat{\beta} - \hat{\beta}' S \beta_0 - \beta_0' S \hat{\beta} + \beta_0' S \beta_0 \qquad , \quad S = S' , \\
&= \hat{\beta}' S S^{-1} X'Y - Y'X S^{-1} S \beta_0 - \beta_0' S S^{-1} X'Y + \beta_0' S \beta_0 \\
&= \hat{\beta}' X'Y - Y'X \beta_0 - \beta_0' X'Y + \beta_0' S \beta_0 \\
&= -(Y'Y - \hat{\beta}'X'Y) + Y'Y - Y'X\beta_0 - \beta_0' X'Y + \beta_0' S \beta_0 \\
&= -(Y'Y - \hat{\beta}'X'Y) + (Y - X\beta_0)' . (Y - X\beta_0) \\
&= -R_0^2 + R_1^2
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate bei gültiger Nullhypothese und R_0^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate ohne Gültigkeit der Nullhypothese. Und der Test sieht jetzt so aus

$$\frac{n-p}{p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p,\,n-p}$$

Diese Testform läßt sich in einer Varianzanalysen-Tabelle aufbauen.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
Mit H_0	$R_1^2 = (Y - X\beta_0)' \cdot (Y - X\beta_0)$	n		
Ohne H_0	$R_0^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$	n-p	$\frac{R_0^2}{n-p}$	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{p}$ $\sim F_{p,\,n-p}$
Rest	$R_0^2 - R_0^2$	p	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{p}$	$\frac{R_0^2}{n-p}$

(vgl. etwa Graybill)

31112. Prüfung nur einiger Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben

a) Der allgemeine Fall

Wir spalten im Modell $Y = X\beta + e$

$\beta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ und dementsprechend $X = (Z, W)$ auf und fragen nach einem Test, der im Modell $Y = Z\gamma + W\delta + e$, $\gamma' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ die Nullhypothese

$H_0: \gamma = \gamma_0$, wobei δ außer acht bleibt,

prüft. Um den Test zu finden, teilen wir in $\hat{\beta} \sim N_p(\beta; \sigma^2 S^{-1})$ die Matrix $S^{-1} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ gemäß der obigen Zerlegung auf. Wir lesen sofort $\hat{\gamma} \sim N_q(\gamma; \sigma^2 \cdot V_{11})$ ab. Deshalb (17) gilt

$$Q = \frac{1}{\sigma^2}(\hat{\gamma} - \gamma_0) V_{11}^{-1} (\hat{\gamma} - \gamma_0) \sim \chi'^2(q; \lambda)$$

mit $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(\gamma - \gamma_0)' \cdot V_{11}^{-1} \cdot (\gamma - \gamma_0)$.

Es ist $\frac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$ von allen Komponenten des Vektors $\hat{\beta}$, also insbesondere von $\hat{\gamma}$ unabhängig verteilt; deshalb sind Q und $\frac{R_0^2}{\sigma^2}$ unabhängig verteilt, folglich (7) ist

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{\sigma^2 \cdot Q}{R_0^2} \sim F'(q, n-p; \lambda)$$

Es ist (31) V_{11}^{-1} eine eigentlich positiv definite Matrix und somit $\lambda = 0$ genau dann, wenn $\gamma = \gamma_0$. Dies liefert (8) den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese $H_0: \gamma = \gamma_0$, wobei δ außer acht bleibt, gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma} - \gamma_0)' V_{11}^{-1} (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{R_0^2} \sim F_{q, n-p}$$

verteilt ist.

Der Zähler läßt sich umformen. Dazu gehen wir von der Zerlegung der Matrix S aus.

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = X'X = \begin{pmatrix} Z' \\ W' \end{pmatrix} (Z, W)$$

$$= \begin{pmatrix} Z'Z, & Z'W \\ W'Z, & W'W \end{pmatrix}$$

und lesen $S_{11} = Z'Z$, $S_{12} = Z'W$, $S_{21} = W'Z$, $S_{22} = W'W$ ab.

Da (32) $V_{11}^{-1} = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}$

$= Z'Z - (Z'W) \cdot (W'W)^{-1} \cdot (W'Z)$

ist, kann man den Test auch so schreiben

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma} - \gamma_0)' Z' [I - W(W'W)^{-1}W'] Z (\hat{\gamma} - \gamma_0)}{R_0^2} \sim F_{q, n-p}$$

Dieser Test führt unmittelbar zu einem Vertrauensbereich für den Vektor γ; der Bereich ist das Innere eines q- dimensionalen Ellipsoids.

Wiederum läßt sich der Test deuten. Zu diesem Zweck nehmen wir die folgenden Umformungen vor.

$\begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} = \hat{\beta} = S^{-1} X'Y = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z' \\ W' \end{pmatrix} Y$, also

$\hat{\gamma} = V_{11} Z'Y + V_{12} W'Y = (V_{11} Z' + V_{12} W') \cdot Y$, also

$\hat{\gamma}' V_{11}^{-1} \hat{\gamma} = Y' (ZV_{11} + WV_{21}) V_{11}^{-1} (V_{11} Z' + V_{12} W') Y$

$= Y' \cdot (ZV_{11} + WV_{21}) \cdot (Z' + V_{11}^{-1} V_{12} W') Y$

$= Y' \cdot (ZV_{11} Z' + WV_{21} Z' + ZV_{12} W' + WV_{21} V_{11}^{-1} V_{12} W') \cdot Y$

Wir benutzen (32) $V_{21} V_{11}^{-1} V_{12} = V_{22} - S_{22}^{-1}$ und erhalten

$\hat{\gamma}' V_{11}^{-1} \hat{\gamma} = Y' (ZV_{11} Z' + WV_{21} Z' + ZV_{12} W' + WV_{22} W' - WS_{22}^{-1} W') Y$

Wegen $X S^{-1} X' = (Z, W) \cdot \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z' \\ W' \end{pmatrix}$

$= ZV_{11} Z' + WV_{21} Z' + ZV_{12} W' + WV_{22} W'$

ergibt dies $\hat{\gamma}' V_{11}^{-1} \hat{\gamma} = Y' \cdot [X S^{-1} X' - W (W'W)^{-1} W'] \cdot Y$

Nun formen wir die übrigen Glieder in

$\sigma^2 \cdot Q = \hat{\gamma}' V_{11}^{-1} \hat{\gamma} - \gamma_0' V_{11}^{-1} \hat{\gamma} - \hat{\gamma}' V_{11}^{-1} \gamma_0 + \gamma_0' V_{11}^{-1} \gamma_0$ um.

In $V_{11}^{-1} \hat{\gamma} = (Z' + V_{11}^{-1} V_{12} W') \cdot Y$ benutzen wir (32) $V_{11}^{-1} V_{12} = - S_{12} S_{22}^{-1}$ und erhalten $V_{11}^{-1} \hat{\gamma} = Z' \cdot [I - W (W'W)^{-1} W'] \cdot Y$,

also insgesamt

$$\sigma^2 \cdot Q = Y'[X S^{-1} X' - W (W'W)^{-1} W'] Y - \gamma_0' Z'[I - W (W'W)^{-1} W'] Y$$
$$- Y'[I - W (W'W)^{-1} W'] Z \gamma_0 + \gamma_0' Z'[I - W (W'W)^{-1} W'] Z \gamma_0$$
$$= - Y'[I - X S^{-1} X'] Y + Y'[I - W (W'W)^{-1} W'] Y$$
$$- \gamma_0' Z'[I - W (W'W)^{-1} W'] Y - Y'[I - W (W'W)^{-1} W'] Z \gamma_0$$
$$+ \gamma_0' Z'[I - W (W'W)^{-1} W'] \cdot Z \gamma_0 .$$

Die Matrix $I - W (W'W)^{-1} W'$ ist symmetrisch und idempotent, was man sofort nachrechnet. Ohne Rechnung folgt dies aus (20), da $W (W'W)^{-1} W'$ ein Projektionsoperator (21) ist. Verwenden wir diese Eigenschaften, so ergibt sich

$$Q = -Y'[I - X S^{-1} X'] Y$$
$$+ [I - W (W'W)^{-1} W'] (Y - Z \gamma_0)' \cdot [I - W (W'W)^{-1} W'](Y - Z \gamma_0)$$

Das erste Glied ist R_0^2 , die kleinste Summe der Abweichungsquadrate ohne Nullhypothese, und das zweite R_1^2 , die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter H_0 , wie wir jetzt zeigen.

$$R_0^2 = Y'Y - \hat{\beta}' X'Y = Y'Y - Y'X S^{-1} X'Y = Y'[I - X S^{-1} X'] Y$$

Das Modell unter Nullhypothese ist

$$Y = Z \gamma_0 + W \delta + e \qquad \text{, also}$$
$$(Y - Z \gamma_0) = W \delta + e \qquad \text{, also (1)}$$
$$\hat{\delta}_0 = (W'W)^{-1} W' (Y - Z \gamma_0) \qquad \text{, also (1)}$$

$$R_1^2 = (Y - Z \gamma_0 - W \hat{\delta}_0)' \cdot (Y - Z \gamma_0 - W \hat{\delta}_0) = \{ [\ldots](\ldots) \}' \cdot [\ldots](\ldots)$$

Deshalb kann man den Test auch so schreiben

$$\frac{n - p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\, n-p}$$

Und in dieser Form läßt er sich aus einer Varianzanalysen- Tabelle gewinnen.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
Mit H_0	$R_1^2 = (Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0)'(Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0)$	$n-(p-q)$		
Ohne H_0	$R_0^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$	$n-p$	$\frac{R_0^2}{n-p}$	$\frac{\frac{R_1^2-R_0^2}{q}}{\frac{R_0^2}{n-p}} \sim F_{q,n-p}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	q	$\frac{R_1^2-R_0^2}{q}$	

b) Der Spezialfall $\gamma_0 = 0$

Dieser Spezialfall H_0: $\gamma = 0$ ist in der Praxis besonders wichtig. Für ihn vereinfacht sich der Test, da

$R_1^2 = (Y - W\hat{\delta}_0)'(Y - W\hat{\delta}_0) = Y'Y - \hat{\delta}_0'W'Y$, also

$R_1^2 - R_0^2 = (Y'Y - \hat{\delta}_0'W'Y) - (Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$

$= \hat{\beta}'X'Y - \hat{\delta}_0'W'Y$

Hierbei wird $\hat{\delta}_0$ aus dem Modell

$$Y = W\delta_0 + e$$

gewonnen, also ist

$$\hat{\delta}_0 = (W'W)^{-1}W'Y$$

Und der Test lautet folgendermaßen.

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{\hat{\beta}'X'Y - \hat{\delta}_0'W'Y}{R_0^2} \sim F_{q,\,n-p}$$

Er läßt sich auch so schreiben

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\,n-p}$$

wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_0^2 diejenige ohne H_0 ist.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
Mit H_0	$R_1^2 = Y'[I - W(W'W)^{-1}W']\,Y$	$n-(p-q)$		
Ohne H_0	$R_0^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$	$n-p$	$\frac{R_0^2}{n-p}$	$\frac{\frac{R_1^2 - R_0^2}{q}}{\frac{R_0^2}{n-p}} \sim F_{q,\,n-p}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	q	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{q}$	

c) Weitere Beweise der bisherigen Tests

Das Testprinzip

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{\chi_1, \chi_2},$$

wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_0^2 diejenige ohne H_0 ist, gestattet es, jeweils einen weiteren Beweis für die einzelnen Tests anzugeben.

Erstens H_0: $\beta = \beta_0$

Es ist $Y - X\beta_0 = (Y - X\hat{\beta}) + (X\hat{\beta} - X\beta_0)$,

wobei die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht stehen; denn

$$(Y - X\hat{\beta})' \cdot X(\hat{\beta} - \beta_0) = (Y'X - \hat{\beta}'S) \cdot (\hat{\beta} - \beta_0)$$

$$= 0 \cdot (\hat{\beta} - \beta_0) = 0$$

Deshalb ist

$(Y - X\beta_0)'(Y - X\beta_0) = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta_0)X'X(\hat{\beta} - \beta_0)$, also

$$R_1^2 = R_0^2 + (\hat{\beta} - \beta_0)'S(\hat{\beta} - \beta_0)$$

Da $Y \sim N_n(X\beta; \sigma^2 I)$ verteilt ist, ist (17)

$$\frac{1}{\sigma^2}(Y - X\beta_0)'(Y - X\beta_0) = \frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2(n; \lambda_1)$$

mit

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2}(X\beta - X\beta_0)'(X\beta - X\beta_0)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \beta_0)'S(\beta - \beta_0)$$

Ferner (2) ist $\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2(n - p)$ verteilt.

Wegen $\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} R_0^2 + \frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta} - \beta_0) S (\hat{\beta} - \beta_0)$

(beachte: $R_1^2 = T'T$, $R_0^2 = T'[I - XS^{-1}X']T$, $(\hat{\beta}-\beta_0)'S(\hat{\beta}-\beta_0) = T'XS^{-1}X'T$

mit $T = Y - X\beta_0$)

ist (15) $\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta} - \beta_0)'S(\hat{\beta} - \beta_0) \sim \chi'^2(p; \lambda_1)$ verteilt, und zwar

unabhängig von $\frac{1}{\sigma^2} R_0^2$. Somit (7) ist

$$\frac{n - p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)'S(\hat{\beta} - \beta_0)}{R_0^2} \sim F'(p, n - p; \lambda_1)$$

verteilt. Da $\lambda_1 = 0$ genau dann, wenn $\beta = \beta_0$ gilt, ist (8)

$$\frac{n - p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta} - \beta_0)'S(\hat{\beta} - \beta_0)}{R_0^2} \sim F_{p, n - p}$$

der notwendige und hinreichende Test für die Nullhypothese

$$H_0: \beta = \beta_0$$

Zweitens H_0: $\gamma = \gamma_0$, wobei δ außer acht bleibt.

Es ist $Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0 = (Y - X\hat{\beta}) + (X\hat{\beta} - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0)$

$$= (Y - X\hat{\beta}) + X\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right],$$

wobei die beiden Vektoren der rechten Seite zueinander orthogonal sind; denn

$$(Y - X\hat{\beta})'X\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right] = (Y'X - \hat{\beta}'S)\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]$$

$$= 0 \cdot \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Somit ist

$$(Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0)'(Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0) = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) +$$

$$+ \left[\beta - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right] X'X \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right], \text{ also}$$

$$R_1^2 = R_0^2 + \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]$$

Wegen $Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0 = [I - W(W'W)^{-1}W'](Y - Z\gamma_0)$

und der Symmetrie und Idempotenz der Matrix $I - W(W'W)^{-1}W'$ ist

$$R_1^2 = (Y - Z\gamma_0)'[I - W(W'W)^{-1}W'](Y - Z\gamma_0)$$

Da $(Y - Z\gamma_0) \sim N_n(X\beta - X\beta_0 ; \sigma^2 I)$ verteilt ist, folgt (14)

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2(r ; \lambda_1) \quad , \text{ wobei}$$

$$r = \text{Spur}\,[I - W(W'W)^{-1}W']$$

und $$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2}(X\beta - Z\gamma_0)'[I - W(W'W)^{-1}W'](X\beta - X\beta_0)$$

Beide Ausdrücke lassen sich umformen

$$r = \text{Spur}\, I + \text{Spur}\, W(W'W)^{-1}W' \quad , (25) ,$$

$$= n - \text{Spur}\,(W'W)^{-1}W'W$$

$$= n - (p - q)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2}[Z(\gamma - \gamma_0) + W\delta]'[I - W(W'W)^{-1}W'][Z(\gamma - \gamma_0) + W\delta]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(\gamma - \gamma_0)'Z[I - W(W'W)^{-1}W']Z \cdot (\gamma - \gamma_0)$$

da $W' - W' \cdot W(W'W)^{-1}W' = W' - W' = 0$.

Es ist $\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2(n - p)$ verteilt, somit (15) ist

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right] \sim \chi'^2(q;\lambda_1)$$

verteilt, und zwar unabhängig von $\frac{1}{\sigma^2} R_0^2$; daraus folgt (7)

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]}{R_0^2} \sim F'(q, n-p;\lambda_1)$$

In 31112 wurde gezeigt, daß λ_1 genau dann verschwindet, wenn

$\gamma = \gamma_0$ ist, somit (8) ist

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]}{R_0^2} \sim F_{q,\,n-p}$$

oder, was dasselbe ist, $\frac{n-p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\,n-p}$

der notwendige und hinreichende Test für die obige Nullhypothese.

Zu dem Schluß (15) sind die folgenden Relationen zu beachten, die anschließend bewiesen werden.

$$R_1^2 = (Y - Z\gamma_0)'[I - W(W'W)^{-1}W'](Y - Z\gamma_0)$$

$$R_0^2 = (Y - Z\gamma_0)'[I - XS^{-1}X'](Y - Z\gamma_0)$$

$$\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \delta_0\end{pmatrix}\right] = (Y - Z\gamma_0)'[XS^{-1}X' - W(W'W)^{-1}W'](Y - Z\gamma_0)$$

Aus $X' \cdot (I - XS^{-1}X') = X' - SS^{-1}X' = 0$ folgt

$$\begin{pmatrix}Z'\\ W'\end{pmatrix} \cdot (I - XS^{-1}X') = 0 \quad , \text{also}$$

$$Z' \cdot (I - XS^{-1}X') = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$Z = XS^{-1}X' \cdot Z \quad \text{und analog} \quad W = XS^{-1}X' \cdot W$$

Deshalb ist $Y - X\hat{\beta} = Y - Z\gamma_0 - (XS^{-1}X'Y - Z\gamma_0)$

$$= (Y - Z\gamma_0) - XS^{-1}X'(Y - Z\gamma_0)$$

$$= [I - XS^{-1}X'](Y - Z\gamma_0)$$

Wegen der Symmetrie und Idempotenz der Matrix $I - X S^{-1} X'$ ist

$$R_0^2 = (Y - X\hat{\beta})' (Y - X\hat{\beta}) = (Y - Z\gamma_0)' [I - X S^{-1} X'] (Y - Z\gamma_0)$$

Ferner ist

$$\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right] = \left[X\hat{\beta} - X \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right]' \cdot \left[X\hat{\beta} - X \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right]$$

und darin

$$X\hat{\beta} - X \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{X} S^{-1} X' Y - Z\gamma_0 - W\hat{\delta}_0$$

$$= X S^{-1} X' Y - X S^{-1} X' Z\gamma_0 - W (W'W)^{-1} W' (Y - Z\gamma_0)$$

$$= [X S^{-1} X' - W (W'W)^{-1} W'] \cdot (Y - Z\gamma_0) ,$$

also wegen der Symmetrie und Idempotenz der Matrix $X S^{-1} X' - W(W'W)^{-1}W'$

$$\left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right]' S \left[\hat{\beta} - \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\delta}_0 \end{pmatrix}\right] = (Y - Z\gamma_0)' [X S^{-1} X' - W(W'W)^{-1} W'] (Y - Z\gamma_0)$$

Und die Relation $R_1^2 = (Y - Z\gamma_0)' [I - W(W'W)^{-1}W'] (Y - Z\gamma_0)$ ergibt sich aus früheren Betrachtungen, wenn man die Symmetrie und Idempotenz der Matrix $I - W (W'W)^{-1}W'$ heranzieht.

3112. $k \geqslant 2$ Regressionsmodelle

31121. Prüfung aller Parameter

Wir wollen für die Regressionsmodelle

$Y_i \sim N_{n1} (X_i \beta_i ; \sigma^2 I)$ mit unabhängigen Y_i ; $i = 1, \ldots, k$

die Nullhypothese

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta^* \\ \beta_2 &= \beta^* \\ &\vdots \\ \beta_k &= \beta^* \end{aligned}$$

prüfen, wobei der Vektor β^* fest vorgegeben ist, Wir können den gesuchten

Test folgendermaßen finden.

In 31111 wurde gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_{0_1}^2 \sim \chi^2 (n_1 - p) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sigma^2} (\hat{\beta}_1 - \beta^*)' S_1 (\hat{\beta}_1 - \beta^*) \sim \chi'^2(p; \lambda_1)$$

unabhängig verteilt sind. Beide Ausdrücke hängen verteilungsmäßig nur von Y_1 ab. Für $\nu \neq \mu$ sind Y_ν und Y_μ unabhängig verteilt, somit sind (5) die

$$\frac{1}{\sigma^2} R_{01}^2, \ldots\ldots, \frac{1}{\sigma^2} R_{0_k}^2 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} (\hat{\beta}_1 - \beta^*)' S_1 (\hat{\beta}_1 - \beta^*), \ldots, \frac{1}{\sigma^2} (\hat{\beta}_k - \beta^*)' S_k (\hat{\beta}_k - \beta^*)$$

alle voneinander unabhängig verteilt. Wegen der Reproduktionseigenschaft (6) der χ'^2 - Verteilungen sind (5)

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} R_{0_i}^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \Sigma (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*) \sim \chi'^2 \left(k \cdot p; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right)$$

voneinander unabhängig verteilt. Folglich (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*)}{\sum_{i}^{k} R_{0_i}^2} \sim F'\left[k \cdot p, \sum_{i=1}^{k} n_i - kp; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right]$$

verteilt. In 31111 wurde $\lambda_i \geq 0$; $i = 1, \ldots, k$; nachgewiesen.

Somit ist $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ genau dann, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

oder, was dasselbe ist (31111) , dann und nur dann, wenn

$$\beta_1 = \beta^*$$
$$\beta_2 = \beta^*$$
$$\vdots$$
$$\beta_k = \beta^*$$

ist. Dies liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$\begin{aligned} H_0:\ \beta_1 &= \beta^* \\ \beta_2 &= \beta^* \\ &\vdots \\ \beta_k &= \beta^* \end{aligned}$$

gültig sei, ist daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_1^k n_i - k \cdot p}{k \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^k (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*)}{\sum_{i=1}^k R_{0i}^2} \sim F_{k \cdot p,\ \sum_{i=1}^k n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

Dieser Test liefert unmittelbar einen mehrdimensionalen Vertrauensbereich für den Erwartungsvektor β.

Interpretation des Tests:

In 31111 wurde

$$R_{0i}^2 + (\hat{\beta}_i - \beta^*)' \cdot S_i \cdot (\hat{\beta}_i - \beta^*) = (Y_i - X_i\beta^*)'(Y_i - X_i\beta^*)$$

nachgewiesen, somit ist

$$\sum_{i=1}^k (Y_i - X_i\beta^*)'(Y_i - X_i\beta^*) = \sum_{i=1}^k R_{0i}^2 + \sum_{i=1}^k (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*),$$

also wegen

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^k (Y_i - X_i\beta^*)'(Y_i - X_i\beta^*) \quad \text{und} \quad R_0^2 = \sum_{i=1}^k R_{0i}^2,$$

wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_0^2 diejenige ohne H_0 bezeichnen,

$$\sum_{i=1}^k (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*) = R_1^2 - R_0^2$$

Deshalb läßt sich der Test so schreiben

$$\frac{\Sigma n_i - k \cdot p}{k \cdot p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k \cdot p, \sum_{i=1}^{k} n_i - kp}$$

Diese Interpretation des Tests ermöglicht einen weiteren Beweis desselben.

Dazu beachten wir

$R_1^2 = (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)'(Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)$, wobei

$$Y_{tot} = \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} , \quad X_{tot} = \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{vmatrix} ;$$

denn

$$(Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)'(Y_{tot} - X_{tot}\beta^*) = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\beta^* \\ \vdots \\ Y_k - X_k\beta^* \end{vmatrix}' \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\beta^* \\ \vdots \\ Y_k - X_k\beta^* \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (Y_i - X_i\beta^*)'(Y_i - X_i\beta^*)$$

Da $Y_{tot} \sim N_{\Sigma n_i}(X_{tot}\beta; \sigma^2 I)$ verteilt ist,

ist (17) $\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)'(Y_{tot} - X_{tot}\beta^*) \sim \chi'^2[\Sigma n_i ; \lambda]$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (X_{tot}\beta - X_{tot}\beta^*)'(X_{tot}\beta - X_{tot}\beta^*)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \beta^*)'X_{tot}'X_{tot}(\beta - \beta^*)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \beta^*)'S_{tot}(\beta - \beta^*)$$

In 31121 wurde gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma R_{0i}^2 \sim \chi^2 (\Sigma n_i - k \cdot p)$$

verteilt ist. Somit können wir (15) anwenden, wenn wir das Bestehen der Voraussetzungen jenes Satzes nachweisen; und das soll mit den folgenden

Umformungen geschehen.

Es sind

$$R_1^2 = (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)'(Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)$$

$$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i - X_i\hat{\beta}_i)'(Y_i - X_i\hat{\beta}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} Y_i' (I - X_i S_i^{-1} X_i') Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (Y_i - X_i\beta^*)'(I - X_i S_i^{-1} X_i')(Y_i - X_i\beta^*) ,$$

da $X_i'(I - X_i S_i^{-1} X_i') = X_i' - S_i S_i^{-1} X_i' = 0$.

Folglich ist

$$R_0^2 = (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)' \begin{vmatrix} (I - X_1 S_1^{-1} X_1') & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (I - X_k S_k^{-1} X_k') \end{vmatrix} (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)$$

Und

$$\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*) = \sum_{i=1}^{k} (X_i\hat{\beta}_i - X_i\beta^*)'(X_i\hat{\beta}_i - X_i\beta^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (X_i S_i^{-1} X_i' Y_i - X_i\beta^*)'(X_i S_i^{-1} X_i' Y_i - X_i\beta^*)$$

$$= \sum_i [X_i S_i^{-1} X_i'(Y_i - X_i\beta^*)]'[X_i S_i^{-1} X_i'(Y_i - X_i\beta^*)]$$

$$= \sum_i (Y_i - X_i\beta^*)' X_i S_i^{-1} X_i'(Y_i - X_i\beta^*)$$

$$= (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)' \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_k S_k^{-1} X_k' \end{vmatrix} (Y_{tot} - X_{tot}\beta^*)$$

Deshalb dürfen wir (15) anwenden, woraus folgt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*) \sim \chi'^2(k \cdot p ; \lambda)$$

unabhängig verteilt sind. Deshalb (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{k\cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*)}{\sum_i R_{0i}^2} \sim F'[k\cdot p, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p; \lambda]$$

verteilt. Weil S_{tot} eine eigentlich positiv definite Matrix ist, ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn $\beta = \beta^*$; woraus (8) sich der notwendige und hinreichende Test für die Nullhypothese H_0: $\beta = \beta^*$ ergibt.

Die obige Interpretation des Tests liefert eine Möglichkeit, ihn aus einer Varianzanalysen-Tabelle aufzubauen.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art		df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
mit H_0	$R_1^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i - X_i\beta^*)'(Y_i - X_i\beta^*)$	$\sum_{i=1}^{k} n_i$		
ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i'Y_i - \hat{\beta}_i'X_i'Y_i)$	$\sum_{i=1}^{k} n_i - kp$	$\frac{R_0^2}{\sum n_i - kp} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{kp, \sum_{i=1}^{k} n_i - kp}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	$k\cdot p$	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{kp} = b$	

Wortwörtlich wie eben ergibt sich noch folgender Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{matrix} \beta_1 = \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_k = \beta_k^* \end{matrix}$$

, wobei die Vektoren $\beta_1^*, \ldots, \beta_k^*$ fest vorgegeben sind,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{k\cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta_i^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta_i^*)}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{k\cdot p, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}$$

verteilt ist.

31122. Prüfung nur einiger Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben.

a) Der allgemeine Fall.

Wir wollen im Modell

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1\beta_1 + e_1 = Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 + e_1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y_k &= X_k\beta_k + e_k = Z_k\gamma_k + W_k\delta_k + e_k \end{aligned}$$

die Nullhypothese

$$H_0 \qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma^* \\ &\vdots \\ \gamma_k &= \gamma^* \end{aligned}$$

prüfen, wobei der Vektor γ^* fest vorgegeben ist, und die $\delta_1, \ldots, \delta_k$ sollen außer acht bleiben.

In 3112 wurde gezeigt, daß $\frac{1}{\sigma^2} R^2_{0_1} \sim \chi^2(n_1 - p)$ und

$$\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\gamma}_1 - \gamma^*)'Z'_1[I - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1']Z_1(\hat{\gamma}_1 - \gamma^*) \sim \chi'^2(q;\lambda_1)$$

unabhängig verteilt sind. Beide Ausdrücke hängen verteilungsmäßig nur von Y_1 ab. Für $\nu \neq \mu$ sind Y_ν und Y_μ unabhängig verteilt, also

[(6) und (5)] sind

$$\frac{1}{\sigma^2}\Sigma R_0^{2}{}_1 \sim X^2(\Sigma n_1 - kp) \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sigma}\Sigma(\hat{\gamma}_1 - \gamma^*)'Z'_1[I - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1']Z_1(\hat{\gamma}_1 - \gamma^*)$$

unabhängig verteilt, somit (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_1 - kp}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k}(\hat{\gamma}_1 - \gamma^*)'Z_1'[I - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1']Z_1 \cdot (\hat{\gamma}_1 - \gamma^*)}{\Sigma R_0^2{}_1} \sim$$

$$\sim F'[k \cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_1 - kp; \sum_{i=1}^{k} \lambda_1]$$

verteilt. Alle λ_i sind ≥ 0 , wie früher gezeigt wurde; somit ist $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$ sind, also dann und nur dann, wenn H_o gültig ist. Das liefert (8) den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_o \qquad \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma^* \\ \vdots \\ \gamma_k = \gamma^* \end{matrix} \quad \text{, wobei } \delta_1, \ldots, \delta_k \text{ außer acht bleiben,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)' Z_i' [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i (\gamma_i - \gamma^*)}{\sum_{i=1}^{k} R_{o\,i}^2}$$

$$\sim F_{k \cdot q,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - kp} \qquad \text{verteilt ist.}$$

Interpretation des Tests:

In 3112 wurde

$$(\hat{\gamma}_i - \gamma^*)' Z'_i [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i (\gamma_i - \gamma^*) = R_{1\,i}^2 - R_{o\,i}^2$$

gezeigt; daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)' Z'_i [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i (\gamma_i - \gamma^*) = \sum_{i=1}^{k} R_{1\,i}^2 - \sum_{i=1}^{k} R_{o\,i}^2$$

$$= R_1^2 - R_o^2 ,$$

da $R_1^2 = \sum_i R_{1\,i}^2$ und $R_o^2 = \sum_i R_{o\,i}^2$ sind, wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_o^2 diejenige ohne H_o bezeichnet. Für R_o^2 wurde dies bereits gezeigt; für R_1^2 sieht man dies so

$$\sum_{i=1}^{k} R_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i - Z_i\gamma^* - W_i\hat{\delta}_{i0})'(Y_i - Z_i\gamma^* - W_i\hat{\delta}_{i0})$$

$$= \left[Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^* - \begin{vmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\delta}_{10} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{k0} \end{vmatrix}\right]' \left[Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^* - \begin{vmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\delta}_{10} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{k0} \end{vmatrix}\right]$$

$$= R_1^2 \quad , \quad (1).$$

Deshalb kann man den Test auch so schreiben

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{kq,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

und somit aus einer Varianzanalysen-Tabelle aufbauen.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{\text{Q.S.}}{\text{df}}$	F
Mit H_0	$R_1^2 = (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^* - A\bar{d})'$ $(Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^* - A\bar{d})$	$\Sigma n_i - k(p-q)$		
Ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i'Y_i - \hat{\beta}_i'X_i'Y_i)$	$\Sigma n_i - kp$	$\frac{R_0^2}{\Sigma n_i - k \cdot p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{k \cdot q,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - kp}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	$k \cdot q$	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{k \cdot q} = b$	

Wobei $A = \begin{vmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k \end{vmatrix}$ und $\bar{d} = \begin{vmatrix} \hat{\delta}_{10} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{k0} \end{vmatrix}$ sind.

Aufgrund dieser Interpretation des Tests kann man für ihn einen weiteren Beweis angeben.

Wir hatten früher die folgenden Relationen bewiesen.

$$R_{1i}^2 = (Y_i - Z_i\gamma^*)'[I - W_i(W_i'W_i)^{-1}W_i']$$

$$R_{0i}^2 = (Y_i - Z_i\gamma^*)'[I - X_iS_i^{-1}X_i']$$

$$\left[\hat{\beta}_1 - \begin{pmatrix}\gamma^* \\ \hat{\delta}_{10}\end{pmatrix}\right]' S_1 \left[\hat{\beta}_1 - \begin{pmatrix}\gamma^* \\ \hat{\delta}_{10}\end{pmatrix}\right] = (Y_1 - Z_1\gamma^*)'\left[X_1 S_1^{-1} X_1' - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1'\right](Y_1 - Z_1\gamma^*)$$

Also sind

$$R_1^2 = (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*)' B_1 (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*)$$

$$R_0^2 = (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*)' B_0 (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix}\gamma^* \\ \hat{\delta}_{10}\end{pmatrix}\right]' S_1 \left[\hat{\beta}_1 - \begin{pmatrix}\gamma^* \\ \hat{\delta}_{10}\end{pmatrix}\right] = (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*)' B_2 (Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*)$$

wobei

$$B_1 = \begin{vmatrix} (I - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1') & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \\ & & (I - W_k(W_k'W_k)^{-1}W_k') \end{vmatrix}, \quad B_0 = \begin{vmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X_1' & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \\ & & I - X_k S_k^{-1} X_k' \end{vmatrix}$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1' & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \\ & & X_k S_k^{-1} X_k' - W_k(W_k'W_k)^{-1}W_k' \end{vmatrix}$$

Da $(Y_{tot} - Z_{tot}\gamma^*) \sim N_{\Sigma n_i}[Z_{tot}(\gamma - \gamma^*) + Ad;\ \sigma^2 I]$

verteilt ist, wobei $d' = (\delta_1, \ldots, \delta_k)$, ist gemäß (14)

$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2(r;\lambda)$ verteilt, denn B_1 ist eine idempotente Matrix. Hierbei haben r und λ die folgenden Bedeutungen

$$r = \text{Rang } B_1 = \text{Spur } B_1 = \sum_{i=1}^{k} \text{Spur}\left[I - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1'\right]$$

$$= \Sigma n_i - \Sigma \text{ Spur } W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1' = \Sigma n_i - \Sigma \text{ Spur } (W_1'W_1)^{-1}W_1'W_1 = \Sigma n_i - k(p-q)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\left[Z_{tot}(\gamma - \gamma^*) + A\begin{pmatrix}\delta_1 \\ \vdots \\ \delta_k\end{pmatrix}\right]' \begin{vmatrix} I - W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1' & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \\ & & I - W_k(W_k'W_k)^{-1}W_k' \end{vmatrix} \left[Z_{tot}(\gamma - \gamma^*) + A\begin{pmatrix}\delta_1 \\ \vdots \\ \delta_k\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \left[Z_i(\gamma - \gamma^*) + W_i\delta_i\right]'\left[I - W_i(W_i'W_i)^{-1}W_i'\right]\left[Z_i(\gamma - \gamma^*) + W_i\delta_i\right]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\gamma - \gamma^*)' Z_i' [\, I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i' \,] Z_i (\gamma - \gamma^*),$$

da $W_i' [\, I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i' \,] = W_i' - W_i' = 0$

Früher wurde gezeigt, daß

$$Z_i' [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i$$

eine eigentlich positiv definite Matrix ist, somit (30) ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} Z_i' [I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i'] Z_i$$

eine eigentlich positiv definite Matrix, also ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn $\gamma = \gamma^*$.

Ferner wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 (\Sigma n_i - kp)$$

verteilt ist. Es ist

$$Y_i - Z_i \gamma^* - W_i \hat{\delta}_{i0} = (Y_i - X_i \hat{\beta}_i) + (X_i \hat{\beta}_i - Z_i \gamma^* - W_i \hat{\delta}_{i0})$$

$$= (Y_i - X_i \hat{\beta}_i) + X_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{i0} \end{pmatrix} \right] ,$$

wobei die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht stehen; denn

$$(Y_i - X_i \hat{\beta}_i)' X_i = Y_i' X_i - \hat{\beta}_i' S_i = 0$$

Somit ist

$$(Y_i - Z_i \gamma^* - W_i \hat{\delta}_{i0})' (Y_i - Z_i \gamma^* - W_i \hat{\delta}_{i0}) = (Y_i - X_i \hat{\beta}_i)' (Y_i - X_i \hat{\beta}_i) + \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{i0} \end{pmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{i0} \end{pmatrix} \right]$$

also $R_1^2 = R_0^2 + \sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{i0} \end{pmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{i0} \end{pmatrix} \right]$

Insgesamt haben wir das Bestehen aller Voraussetzungen des Satzes (15) nachgewiesen und folgern, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p\right) \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right] \sim \chi'^2 (k \cdot q; \lambda)$$

unabhängig verteilt sind. Deshalb (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right]}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F'\left[k \cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - kp; \lambda\right]$$

verteilt. Dies liefert (8) den gesuchten notwendigen und hinreichenden Test für die Nullhypothese; er läßt sich in der Form

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right]}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{k \cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

schreiben.

Wortwörtlich wie eben beweist man noch den folgenden Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma_1^* \\ \vdots \\ \gamma_k = \gamma_k^* \end{matrix} \quad \text{, wobei die } \delta_1, \ldots, \delta_k \text{ außer acht bleiben,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \delta_{10} \end{pmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \hat{\delta}_{10} \end{pmatrix}\right]}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{k \cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

b) Der Spezialfall $\gamma = 0$

Dieser Spezialfall

$$H_0: \begin{matrix} \gamma_1 = 0 \\ \vdots \\ \gamma_k = 0 \end{matrix} \quad \text{, wobei die } \delta_1, \dots, \delta_k \text{ außer acht bleiben,}$$

ist in der Praxis besonders wichtig. Für ihn vereinfacht sich der Test, denn wir hatten früher

$$R_1^2{}_1 - R_0^2{}_1 = \hat{\beta}_1' X_1' Y_1 - \hat{\delta}_{11}' W_1' Y_1 \text{ mit } \hat{\delta}_{11} = (W_1' W_1)^{-1} W_1' Y_1$$

bewiesen, woraus

$$R_1^2 - R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_1' X_1' Y_1 - \hat{\delta}_{11}' W_1' Y_1)$$

folgt. Deshalb läßt sich der Test so schreiben

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_1' X_1' Y_1 - \hat{\delta}_{11}' W_1' Y_1)}{\Sigma R_0^2{}_1} \sim F_{k \cdot q,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

und kann aus einer Varianzanalysen- Tabelle aufgebaut werden.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{\text{Q.S.}}{\text{df}}$	F
mit H_0	$R_1^2 = \sum_{i=1}^{k} Y_1' [I - W_1 (W_1' W_1)^{-1} W_1'] Y_1$	$\Sigma n_1 - k \cdot (p-q)$		
ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_1' Y_1 - \hat{\beta}_1' X_1' Y_1)$	$\Sigma n_1 - k \cdot p$	$\frac{R_0^2}{\Sigma n_1 - k \cdot p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{k \cdot q, \Sigma n_1 - kp}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	$k \cdot q$	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{k \cdot q} = b$	

312. Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten.

3121. 2 Regressionsmodelle.

31211. Vergleich aller Parameter (Gleichheit zweier Regressionshyperebenen).

Wir suchen einen Test, der bei den Modellen

$$Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1 \qquad \text{und} \qquad Y_2 = X_2 \beta_2 + e_2$$

die Nullhypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

prüft. Man kann den Test auf folgendem Wege finden.

$\hat{\beta}_1 \sim N_p (\beta_1 ; \sigma^2 S_1^{-1})$ und $\hat{\beta}_2 \sim N_p (\beta_2 ; \sigma^2 S_2^{-1})$

sind unabhängig (5) verteilt, da sie (1) verteilungsmäßig nur von Y_1 und Y_2 abhängen und letztere unabhängig verteilt sind. Somit (11/12) ist

$$(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) \sim N_p [(\beta_1 - \beta_2) ; \sigma^2 (S_1^{-1} + S_2^{-1})]$$

verteilt. Da S_1 und S_2 beide eigentlich positiv definit sind, gilt (30) dasselbe auch von $(S_1^{-1} + S_2^{-1})$; folglich existiert $(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}$.

Deshalb (17) ist

$$Q = \frac{1}{\sigma^2} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)' (S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) \sim \chi'^2 (p ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (\beta_1 - \beta_2)' (S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} (\beta_1 - \beta_2)$$

Wir zeigen nun, daß Q und $R_0{}^2$ unabhängig verteilt sind.

$\hat{\beta}_1$ und $R_0{}^2{}_1$ sind (2) unabhängig verteilt und hängen verteilungsmäßig nur von Y_1 ab. Für $\nu \neq \mu$ sind Y_ν und Y_μ unabhängig verteilt; deshalb ist $\hat{\beta}_1$ von $R_0{}^2{}_1 + R_0{}^2{}_2$ unabhängig verteilt , also sind auch Q und $R_0{}^2{}_1 + R_0{}^2{}_2$ unabhängig verteilt. Da, wie bereits gezeigt,

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 = \frac{1}{\sigma^2}(R_0^2{}_1 + R_0^2{}_2) \sim \chi^2 (n_1 + n_1 - 2p)$$

verteilt ist, ist (7)

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)'(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)}{R_0^2{}_1 + R_0^2{}_2} \sim F'[p, n_1 + n_2 - 2p; \lambda]$$

verteilt. Hierbei ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn $\beta_1 = \beta_2$ ist; denn $(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}$ ist (31) wieder eigentlich positiv definit. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)'(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)}{R_0^2{}_1 + R_0^2{}_2} \sim F_{p,\, n_1 + n_2 - 2p}$$

verteilt ist.

Der Test läßt sich interpretieren und dabei wieder jenes allgemeine Testprinzip erkennen.

$$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 = S_1^{-1} X_1' Y_1 - S_2^{-1} X_2' Y_2$$

$$(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)'(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = Y_1' X_1 S_1^{-1}(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} S_1^{-1} X_1' Y_1$$

$$- Y_1' X_1 S_1^{-1}(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} S_2^{-1} X_2' Y_2 - Y_2' X_2 S_2^{-1}(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} S_1^{-1} X_1' Y_1$$

$$+ Y_2' X_2 S_2^{-1}(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} S_2^{-1} X_2' Y_2$$

Die Ausdrücke $S_1^{-1}(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} S_j^{-1}$ formen (19) wir um und erhalten mit der Bezeichnung

$$Y_{tot} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)'(S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) =$$

$$= Y'_{tot} \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' - X_1 (S_1 + S_2)^{-1} X_1' , & - X_1 (S_1 + S_2)^{-1} X_2' \\ - X_2 (S_1 + S_2)^{-1} X_1' , & X_2 S_2^{-1} X_2' - X_2 (S_1 + S_2)^{-1} X_2' \end{vmatrix} Y_{tot}$$

$$= Y'_{tot} \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' , & 0 \\ 0 , & X_2 S_2^{-1} X_2' \end{vmatrix} Y_{tot} - Y'_{tot} \begin{vmatrix} X_1 (S_1 + S_2)^{-1} X_1' , & X_1 (S_1 + S_2)^{-1} X_2' \\ X_2 (S_1 + S_2)^{-1} X_1' , & X_2 (S_1 + S_2)^{-1} X_2' \end{vmatrix} Y_{tot}$$

$$= Y'_{tot} \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' , & 0 \\ 0 , & X_2 S_2^{-1} X_2' \end{vmatrix} Y_{tot} - Y'_{tot} X_{tot} (S_1 + S_2)^{-1} X'_{tot} Y_{tot}$$

Es ist

$$S_{tot} = X'_{tot} X_{tot} = (X_1', X_2') \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_1' X_1 + X_2' X_2 = S_1 + S_2 ,$$

also

$$(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)' (S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$$

$$= - Y'_{tot} \begin{pmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X_1' , & 0 \\ 0 , & I - X_2 S_2^{-1} X_2' \end{pmatrix} Y_{tot} + Y'_{tot} [I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}] Y_{tot}$$

$$= - R_0^2 + R_1^2 ,$$

wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_0^2 diejenige ohne H_0 bezeichnen

$$R_1^2 = Y'_{tot} (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}) Y_{tot}$$

$$R_0^2 = R_{01}^2 + R_{02}^2 = \sum_{i=1}^{2} Y_i' (I - X_i S_i^{-1} X_i') Y_i$$

Deshalb kann der Test auch so geschrieben werden

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{p,\, n_1 + n_2 - 2p}$$

und deshalb aus einer Varianzanalysen - Tabelle aufgebaut werden.

Tabelle der Varianzanalyse (vgl. Chow):

Art	Q.S.	df	Q.S./df	F
mit H_0	$R_1^2 = Y'_{tot}(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot})Y_{tot}$	$n_1 + n_2 - p$		
ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{2} (Y'_i Y_i - \hat{\beta}'_i X'_i Y_i)$	$n_1 + n_2 - p$	$\frac{R_0^2}{n_1+n_2-2p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{p, n_1+n_2-2p}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	p	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{p} = b$	

Diese Interpretation regt einen weiteren Beweis des Tests an.

Wir gehen von

$$R_1^2 = (Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})$$

aus und zerlegen

$$Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot} = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ X_2\hat{\beta}_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix} ;$$

hierbei stehen die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht; denn

$$(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'X_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) = (Y'_1 X_1 - \hat{\beta}'_1 S_1)(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) = 0 \cdot (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) = 0.$$

Somit ist

$$(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot}) = \sum_{i=1}^{2} (Y_i - X_i\hat{\beta}_i)'(Y_i - X_i\hat{\beta}_i) + \sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}),$$

d.h. $$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} R_0^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) .$$

Nun zeigen wir, daß alle Voraussetzungen des Satzes (15) erfüllt sind.

$$R_1^2 = Y'_{tot}(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}) Y_{tot}$$

$$R_0^2 = Y'_{tot} \begin{pmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X_1', & 0 \\ 0 & , I - X_2 S_2^{-1} X_2' \end{pmatrix} Y_{tot}$$

$$\hat{\beta}_1 = S_1^{-1} X_1' Y_1 = (S_1^{-1} X_1' , 0)\, Y_{tot} \quad , \quad \hat{\beta}_2 = (0 , S_2^{-1} X_2')\, Y_{tot}$$

also ist $\sum_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) = Y'_{tot} \cdot C \cdot Y_{tot}$

positiv definit, da S_1 und S_2 beide positiv definit sind. Daß

$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2p)$ verteilt ist, wurde bereits gezeigt. Da die quadratische Form $R_1^2 = Y'_{tot} (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}) Y_{tot}$ eine symmetrische und idempotente Matrix $(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot})$ hat, ist (14)

$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2(\tau ; \lambda)$ verteilt, wobei

$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu'_{tot} (I - P_{tot}) \mu_{tot}$ und

$\tau = \text{Rang}(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}) = \text{Spur}(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}) = \text{Spur } I - \text{Spur } X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}$

$= (n_1 + n_2) - \text{Spur } S_{tot}^{-1} X'_{tot} X_{tot} = (n_1 + n_2) - p$

Dabei bezeichnen

$\mu_{tot} = \begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{vmatrix}$ und $P_{tot} = X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}$

Insgesamt sind alle Voraussetzungen zu Satz (15) als gültig nachgewiesen worden. Folglich sind

$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2p)$ und

$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) \sim \chi'^2(p ; \lambda)$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_i R_{0i}^2} \sim F'(p, n_1 + n_2 - 2p ; \lambda)$$

verteilt. Wir zeigen, daß $\lambda = 0$ genau dann ist, wenn $\beta_1 = \beta_2$.

Dazu beachten (20) wir, daß P_{tot} der Projektionsoperator in den Spaltenraum X_{tot} ist. Somit (21) ist $(I - P_{tot})$ symmetrisch und idempotent, also

ist

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} [\,(I - P_{tot})\,\mu_{tot}\,]'[\,(I - P_{tot})\,\mu_{tot}\,] .$$

Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$(I - P_{tot})\,\mu_{tot} = 0$$

ist, d.h. genau dann, wenn

$$\mu_{tot} = P_{tot}\,\mu_{tot} ,$$

also genau dann, wenn μ_{tot} im Spaltenraum X_{tot} liegt, d.h. genau dann, wenn

$$\mu_{tot} = X_{tot} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} X_1\alpha \\ X_2\alpha \end{pmatrix},$$

also genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} X_1\beta_1 \\ X_2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1\alpha \\ X_2\alpha \end{pmatrix},$$

also genau dann, wenn

$$X_1\beta_1 = X_1\alpha$$

$$X_2\beta_2 = X_2\alpha$$

Durch linksseitiges Multiplizieren mit $S_1^{-1}X_1'$ folgt daraus

$$\beta_1 = \alpha \quad \text{und} \quad \beta_2 = \alpha ,$$

also $\beta_1 = \beta_2$, und umgekehrt ist in diesem Fall wegen

$\mu_{tot} = X_{tot}\beta$ der Vektor μ_{tot} im Spaltenraum X_{tot} gelegen.

Dies liefert den notwendigen und hinreichenden Test für die Nullhypothese

$H_0 : \beta_1 = \beta_2$.

Test:

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{2} R_0{}^2{}_1} \sim F_{p,\,n_1 + n_2 - 2p}$$

In dieser Form läßt sich der Test auf mehrere Modelle übertragen.

31212. Vergleich nur einiger Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Wir suchen einen Test, der bei den beiden Modellen

$$Y_1 = X_1\beta_1 + e_1 = Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 + e_1 \quad ,$$

$$Y_2 = X_2\beta_2 + e_2 = Z_2\gamma_2 + W_2\delta_2 + e_2$$

die Nullhypothese

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2$, wobei δ_1 und δ_2 außer acht bleiben,

prüft. Wir können ihn auf folgendem Wege finden. Entsprechend der Zerlegung von $\beta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ spalten wir auch die zugehörigen Dispersionsmatrizen auf

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 \Omega_1 \\ \cdot\,, \cdot\cdot \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2^{-1} = \begin{pmatrix} V_2 \Omega_2 \\ \cdot\,, \cdot\cdot \end{pmatrix}$$

und lesen aus

$$(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) \sim Np\,[\,(\beta_1 - \beta_2)\,;\, \sigma^2\,(S_1^{-1} + S_2^{-1})\,]$$

$$(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2) \sim Nq\,[\,(\gamma_1 - \gamma_2)\,;\, \sigma^2\,(V_1 + V_2)\,]$$

ab. Deshalb (17) ist

$$Q = \frac{1}{\sigma^2}\,(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)' \cdot (V_1 + V_2)^{-1} \cdot (\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2) \sim \chi'^2(q\,;\,\lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\,(\gamma_1 - \gamma_2)' \cdot (V_1 + V_2)^{-1} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)$$

Es wurde bereits gezeigt, daß $R_0^2 = R_{0_1}^2 + R_{0_2}^2$ sowohl von $\hat{\beta}_1$ als auch von $\hat{\beta}_2$ unabhängig verteilt ist; also ist R_0^2 von $(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)$ und somit von Q unabhängig verteilt. Deshalb (7) ist

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)' \cdot (V_1 + V_2)^{-1} \cdot (\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}{R_0^2} \sim F'[\,q, n_1 + n_2 - 2p\,;\,\lambda\,]$$

verteilt. λ verschwindet genau dann, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$; denn $(V_1 + V_2)^{-1}$

ist (30) wieder eigentlich positiv definit. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2$, wobei δ_1 und δ_2 außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)' \cdot (V_1 + V_2)^{-1} \cdot (\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}{R_0{}^2{}_1 + R_0{}^2{}_2} \sim F_{q, n_1 + n_2 - 2p}$$

verteilt ist.

Um das allgemeine Testprinzip nachzuweisen, wollen wir den Test interpretieren. Diesem Zweck dienen die folgenden Umformungen.

Aus

$$\hat{\beta} = S^{-1} X'Y = \begin{pmatrix} V & \Omega \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z' \\ W' \end{pmatrix} Y$$

folgt

$$\hat{\gamma} = (V Z' + \Omega W') Y$$

$$= V (Z' + V^{-1} \Omega W') Y$$

Weil

$$S = X'X = \begin{pmatrix} Z' \\ W' \end{pmatrix} (Z, W) = \begin{pmatrix} Z'Z & , & Z'W \\ W'Z & , & W'W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & , & S_{12} \\ S_{21} & , & S_{22} \end{pmatrix}$$

gilt gemäß (32)

$$V^{-1} \cdot \Omega = - S_{12} S_{22}^{-1} = - (Z'W) \cdot (W'W)^{-1} ,$$

also

$$\hat{\gamma} = V [Z' - Z'W \cdot (W'W)^{-1} W'] Y$$

$$= V Z' [I - W (W'W)^{-1} W'] Y$$

$$= (V^{-1})^{-1} Z' [I - W (W'W)^{-1} W'] Y$$

Wir hatten bereits

$$V^{-1} = Z' [I - W (W'W)^{-1} W'] Z$$

gezeigt. Somit ist

$$\hat{\gamma} = Z' [I - W (W'W)^{-1} W']^{-1} \cdot Z' [I - W (W'W)^{-1} W'] Y$$

$P_W =_{Def} W (W'W)^{-1} W'$ ist der Projektionsoperator, der in den Spaltenraum W projiziert. Da jeder Projektionsoperator symmetrisch und idempotent ist, ist auch

$$I - P_W = I - W (W'W)^{-1} W'$$

symmetrisch und idempotent. Setzen wir

$$L =_{Def} (I - P_W) Z ,$$

so kann man

$$\hat{\gamma} = (L'L)^{-1} L' (I - P_W) Y$$

schreiben. Hierin ist

$$(I - P_W) Y =_{Def} Y_{\perp W}$$

die Komponente des Vektors Y in dem zum Spaltenraum W gehörigen Orthogonalraum. Schließlich ist

$$\hat{\gamma} = (L'L)^{-1} L' Y_{\perp W}$$

in Analogie zu

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$\hat{\gamma}$ wird somit nach der Methode der kleinsten Quadrate aus dem Modell

$$Y_{\perp W} = L \cdot \gamma + e \text{ , d.h. aus}$$

$$(I - P_W) Y = (I - P_W) Z \cdot \gamma + e$$

gewonnen. Angeregt durch dieses Ergebnis, zerlegen wir

$$Z = G + H ,$$

wobei H die Komponente von Z bezeichnet, die im Spaltenraum W liegt ,

und G diejenige aus dem zum Spaltenraum W gehörigen Orthogonalraum.

Deshalb sind

$$H = P_W Z = W (W'W)^{-1} W'Z = W \cdot C \qquad \text{mit} \quad C = (W'W)^{-1} W'Z$$

und $G = (I - P_W) Z = L$

Mit diesen Festsetzungen gilt

$$Y = X\beta + e = Z\gamma + W\delta + e = (G + H)\gamma + W\delta + e$$

$$= G\gamma + W(C\gamma + \delta) + e = L\gamma + W(C\gamma + \delta) + e$$

Setzen wir $\tau =_{Def} C\gamma + \delta$, so gilt

$$Y = L\gamma + W\tau + e$$

Ebenso zerlegen wir Y in eine Komponente des Spaltenraumes W und in eine dazu orthogonale

$$Y = P_W Y + (I - P_W) Y$$

$$= Y_W + Y_{\perp W}$$

Die Schätzungen $\hat{\gamma}$, $\hat{\tau}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate sind Lösungen von

$$(Y - L\gamma - W\tau)'(Y - L\gamma - W\tau) = \underset{\gamma, \tau}{\text{Min.}} ,$$

also von

$$[\,(Y_{\perp W} - L\gamma) + (Y_W - W \cdot \tau)\,]' \cdot [\,(Y_{\perp W} - L\gamma) + (Y_W - W\tau)\,] = \underset{\gamma, \tau}{\text{Min.}}$$

Da $(Y_{\perp W} - L\gamma)$ im Orthogonalraum zum Spaltenraum W und $(Y_W - W\tau)$ im Spaltenraum W liegen, stehen beide Vektoren aufeinander senkrecht, so daß $\hat{\gamma}$ und $\hat{\tau}$ aus

$$(Y_{\perp W} - L\gamma)'(Y_{\perp W} - L\gamma) + (Y_W - W\tau)'(Y_W - W\tau) = \underset{\gamma, \tau}{\text{Min.}}$$

zu bestimmen sind. Deshalb werden $\hat{\gamma}$ aus

$$(Y_{\perp W} - L\gamma)'(Y_{\perp W} - L\gamma) = \underset{\gamma}{\text{Min.}}$$

und $\hat{\tau}$ aus

$$(Y_W - W\tau)'(Y_W - W\tau) = \underset{\tau}{\text{Min.}}$$

gewonnen. Diese Trennung beider Variablen war möglich, weil

es sich bei

$$Y = L\gamma + W\tau + e$$

um ein orthogonales Modell, d.h. $L' \cdot W = 0$, handelt. D.h. $\hat{\gamma}$ wird

aus dem Modell

$$Y_{\perp W} = L\gamma + e_{\perp W}$$

und $\hat{\tau}$ aus dem Modell

$$Y_W = W\tau + e_W$$

gewonnen; also

$$\hat{\gamma} = (L'L)^{-1} L'Y_{\perp W}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= (W'W)^{-1}W'Y_W \\ &= (W'W)^{-1}W'P_W Y \\ &= (W'W)^{-1}W'W\,(W'W)^{-1}W'Y \\ &= (W'W)^{-1}W'Y\end{aligned}$$

Setzen wir

$$T = \underset{Def}{(L'L)},$$

So gelten

$$\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 = T_1^{-1}L_1'Y_{\perp W1} - T_2^{-1}L_2'Y_{\perp W2}$$

$$\sigma^2 \cdot Q = Y'_{\perp W1}L_1T_1^{-1}(T_1^{-1} + T_2^{-1})^{-1}T_1^{-1}L_1'Y_{\perp W1} -$$

$$- Y'_{\perp W1} L_1 T_1^{-1} (T_1^{-1} + T_2^{-1})^{-1} T_2^{-1} L'_2 Y_{\perp W2}$$

$$- Y'_{\perp W2} L_2 T_2^{-1} (T_1^{-1} + T_2^{-1})^{-1} T_1^{-1} L'_1 Y_{\perp W1}$$

$$+ Y_{\perp W2} L_2 T_2^{-1} (T_1^{-1} + T_2^{-1})^{-1} T_2^{-1} L'_2 Y_{\perp W2}$$

Hieraus (19) folgt

$$\sigma^2 \cdot Q = Y'_\perp \begin{vmatrix} L_1 T_1^{-1} L'_1 , & 0 \\ 0 & , L_2 T_2^{-1} L'_2 \end{vmatrix} Y_\perp - Y'_\perp \begin{vmatrix} L_1 (T_1+T_2)^{-1} L'_1, & L_1 (T_1+T_2)^{-1} L'_2 \\ L_2 (T_1+T_2)^{-1} L'_1, & L_2 (T_1+T_2)^{-1} L'_2 \end{vmatrix} Y_\perp$$

$$= Q_1 - Y'_{\perp W1} (I - L_1 T_1^{-1} L'_1) Y_{\perp W1} - Y'_{\perp W2} (I - L_2 T_2^{-1} L'_2) Y_{\perp W2}$$

Wir zeigen jetzt, daß

$$Y'_{\perp W1} (I - L_1 T_1^{-1} L'_1) Y_{\perp W1} = R_{0\,1}^2 = Y_1' (I - X_1 S_1^{-1} X_1') Y_1$$

ist. Dazu benutzen wir die Eigenschaften

$$\underset{\beta_1}{\text{Min.}} (Y_1 - X_1 \beta_1)'(Y_1 - X_1 \beta_1) = \underset{\gamma_1}{\text{Min.}} (Y_{\perp W1} - L_1 \gamma_1)'(Y_{\perp W1} - L_1 \gamma_1) + \underset{\tau_1}{\text{Min.}} (Y_{W1} - W_1 \tau_1)' \cdot (Y_{W1} - W_1 \tau_1)$$

Unter Berücksichtigung von

$$W_1 \hat{\tau}_1 = P_{W1} Y_1 = Y_{W1}$$

folgt daraus

$$(Y_1 - X_1 \hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1 \hat{\beta}_1) = (Y_{\perp W1} - L_1 \hat{\gamma}_1)'(Y_{\perp W1} - L_1 \hat{\gamma}_1) + (Y_{W1} - W_1 \tau_1)'(Y_{W1} - W_1 \tau_1)$$

$$= (Y_{\perp W1} - L_1 \hat{\gamma}_1)'(Y_{\perp W1} - L_1 \hat{\gamma}_1) + 0$$

also (1)

$$Y_1' (I - X_1 S_1^{-1} X_1') Y_1 = Y'_{\perp W1} (I - L_1 T_1^{-1} L'_1) Y_{\perp W1}$$

Von Q_1 behaupten wir, daß es die kleinste Summe R_1^2 der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese ist. Zum Beweis gehen wir vom totalen Modell unter Nullhypothese aus

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 , & W_1 , & 0 \\ Z_2 , & 0 , & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Setzen wir

$$Z = {}_{Def}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = {}_{Def}\begin{pmatrix} W_1 , 0 \\ 0 , W_2 \end{pmatrix},$$

so ist, wie bereits bewiesen, $R_1^2 = Y'_{\perp W} (I - L T^{-1} L') Y_{\perp W}$, wobei

$$L = (I - P_W)\, Z$$

$$= \left[I - \begin{pmatrix} P_{W1} & 0 \\ 0 & P_{W2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} (I - P_{W1}) , 0 \\ 0 , (I - P_{W2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (I - P_{W1})\, Z_1 \\ (I - P_{W2})\, Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} ;$$

denn es ist

$$P_W = W(W'W)^{-1}W' = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (W_1'W_1)^{-1} , 0 \\ 0 , (W_2'W_2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1' , 0 \\ 0 , W_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} W_1 (W_1'W_1)^{-1} W_1' , & 0 \\ 0 & , W_2 (W_2'W_2)^{-1} W_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{W1} , 0 \\ 0 , P_{W2} \end{vmatrix}$$

Somit ist

$$T = L'L = (L_1', L_2') \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = L_1'L_1 + L_2' L_2 = T_1 + T_2$$

und

$$T^{-1} = (T_1 + T_2)^{-1}$$

Ferner ist

$$Y_{\perp W} = (I - P_W)\, Y = \begin{vmatrix} (I - P_{W1}), 0 \\ 0 , (I - P_{W2}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (I - P_{W1})\, Y_1 \\ (I - P_{W2})\, Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{\perp W1} \\ Y_{\perp W2} \end{vmatrix}$$

Somit kann Q_1 folgendermaßen geschrieben werden

$$Q_1 = Y'_{\perp} \cdot (I - L \cdot T^{-1} \cdot L') Y_{\perp}$$

Insgesamt haben wir

$$\sigma^2 \cdot Q = R_1^2 - R_{0_1}^2 - R_{0_2}^2$$

$$= R_1^2 - R_0^2$$

nachgewiesen. Deshalb kann der Test folgendermaßen geschrieben werden

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\, n_1 + n_2 - 2p}$$

wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_0^2 diejenige ohne H_0 bezeichnen. Folglich kann der Test aus einer Varianzanalysen- Tabelle aufgebaut werden.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
mit H_0	$R_1^2 = Y'[I - AS_A^{-1}A']Y$	$n_1+n_2-(2p-q)$		
ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{2} (Y_i'Y_i - \hat{\beta}_i' X_i' Y_i)$	$n_1 + n_2 - 2p$	$\frac{R_0^2}{n_1+n_2-2p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{q, n_1+n_2-2p}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$		$\frac{R_1^2 - R_0^2}{q} = b$	

wobei $A = \begin{vmatrix} Z_1 , W_1 , 0 \\ Z_2 , 0 , W_2 \end{vmatrix}$

In der Form

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)'(V_1 + V_2)^{-1}(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}{R_0^2} \sim F_{q,\, n_1 + n_2 - 2p}$$

läßt sich der Test noch nicht auf mehrere Modelle übertragen. Wir werden ihn deshalb solange umformen, bis er sich auf $k \geqslant 2$ Modelle übertragen läßt.

Es ist

$$\hat{\gamma}_{tot} = (L'L)^{-1} \cdot L' \cdot (I - P_W)\, Y$$

Es wurde bereits

$$\begin{aligned} L'L &= L_1'L_1 + L_2'L_2 \\ &= Z_1'(I - P_{W1})\, Z_1 + Z_2'(I - P_{W2})\, Z_2 \\ &= V_1^{-1} + V_2^{-1} \end{aligned}$$

nachgewiesen. Somit ist

$$\hat{\gamma}_{tot} = (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} (L_1', L_2') \begin{vmatrix} (I - P_{W1})\, Y_1 \\ (I - P_{W2})\, Y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} [L_1'(I - P_{W1})Y_1 + L_2'(I - P_{W2})\, Y_2]$$

$$= (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} [(L_1'L_1)\, \hat{\gamma}_1 + (L_2'L_2)\, \hat{\gamma}_2]$$

$$= (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} [V_1^{-1}\, \hat{\gamma}_1 + V_2^{-1}\, \hat{\gamma}_2]$$

Da der Erwartungswert ein linearer Operator ist, und da die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate biasfrei sind, gilt ferner

$$\gamma_{tot} = (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} [V_1^{-1}\, \gamma_1 + V_2^{-1}\, \gamma_2],$$

was wir an späterer Stelle benutzen werden. Dieses $\hat{\gamma}_{tot}$ ist implizite in Q enthalten ; denn es ist

$$\begin{aligned} \sigma^2 \cdot Q &= (\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)'(V_1 + V_2)^{-1}(\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2) \\ &= \hat{\gamma}_1'(V_1 + V_2)^{-1}\, \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_1'(V_1 + V_2)^{-1}\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_2'(V_1 + V_2)^{-1}\, \hat{\gamma}_1 \\ &\quad + \hat{\gamma}_2'(V_1 + V_2)^{-1}\, \hat{\gamma}_2 \end{aligned}$$

Hierin benutzen wir (19), angewendet auf V_1^{-1}, V_2^{-1}, d.h.

$$V_i (V_1 + V_2)^{-1} V_k = (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} \quad \text{für } i \neq k \text{ , und}$$

$$V_i (V_1 + V_2)^{-1} V_i = V_i - (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1}$$

und erhalten

$$\sigma^2 \cdot Q = \hat{\gamma}_1' V_1^{-1} [V_1 - (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1}] V_1^{-1} \hat{\gamma}_1$$
$$- \hat{\gamma}_1' V_1^{-1} (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} V_2^{-1} \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_2' V_2^{-1} (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} V_1^{-1} \hat{\gamma}_1$$
$$+ \hat{\gamma}_2' V_2^{-1} [(V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1}] V_2^{-1} \hat{\gamma}_2$$

$$\sigma^2 \cdot Q = (\hat{\gamma}_1' V_1^{-1}, \hat{\gamma}_2' V_2^{-1}) \left[\begin{pmatrix} V_1, 0 \\ 0, V_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1}, 0 \\ 0, (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} V_1^{-1} \hat{\gamma}_1 \\ V_2^{-1} \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

Nun wurde bereits bewiesen, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} Q \sim \chi'^2$$

verteilt ist. Da (11)

$$\begin{vmatrix} V_1^{-1} \hat{\gamma}_1 \\ V_2^{-1} \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} \sim N_{2q} \left[\begin{vmatrix} V_1^{-1} \gamma_1 \\ V_2^{-1} \gamma_2 \end{vmatrix}; \sigma^2 \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}, 0 \\ 0, V_2^{-1} \end{vmatrix} \right]$$

verteilt ist, lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} Q \sim \chi'^2$$

verteilt ist:

$$B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}, 0 \\ 0, V_2^{-1} \end{vmatrix} \cdot B = B ,$$

wobei

$$B = \begin{vmatrix} V_1, 0 \\ 0, V_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1}, 0 \\ 0, (V_1^{-1} + V_2^{-1})^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, 1 \\ 1, 1 \end{vmatrix}$$

Also gilt

$$B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}, 0 \\ 0, V_2^{-1} \end{vmatrix} \cdot B = B ,$$

was man auch direkt nachrechnen kann. Folglich ist

$$\sigma^2 \cdot Q = \left[B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} \hat{\gamma}_1 \\ V_2^{-1} \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} \right]' \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}, 0 \\ 0, V_2^{-1} \end{vmatrix} \cdot \left[B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} \hat{\gamma}_1 \\ V_2^{-1} \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} \right]$$

und hierin

$$B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 \\ V_2^{-1}\hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - (V_1^{-1}+V_2^{-1})^{-1}[V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 + V_2^{-1}\hat{\gamma}_2] \\ \hat{\gamma}_2 - (V_1^{-1}+V_2^{-1})^{-1}[V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 + V_2^{-1}\hat{\gamma}_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_{tot} \end{vmatrix}$$

also

$$\sigma^2 \cdot Q = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_{tot} \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}, & 0 \\ 0, & V_2^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_{tot} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})$$

Deshalb läßt sich der Test auch so schreiben

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})}{\sum_{i=1}^{2} R_{0i}^2} \sim F_{q,\, n_1+n_2-2p}$$

Und in dieser Form läßt er sich auf $k \geqslant 2$ Modelle übertragen.

Die Interpretation des Tests in der Form

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,\, n_1+n_2-2p}$$

ermöglicht es, für ihn einen weiteren Beweis anzugeben. Es ist

$$R_1^2 = \left[\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Z_1, & W_1, & 0 \\ Z_2, & 0, & W_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1tot} \\ \hat{\delta}_{2tot} \end{vmatrix} \right]' \cdot \left[\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Z_1, & W_1, & 0 \\ Z_2, & 0, & W_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1tot} \\ \hat{\delta}_{2tot} \end{vmatrix} \right]$$

Hierin zerlegen wir

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Z_1, & W_1, & 0 \\ Z_2, & 0, & W_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1tot} \\ \hat{\delta}_{2tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1 \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1tot} \end{vmatrix} \\ X_2\hat{\beta}_2 - X_2 \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{2tot} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Wegen

$$(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)' X_1 = Y_1' X_1 - \hat{\beta}_1' S_1 = 0$$

stehen die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht, somit ist

$$R_1^2 = R_0^2 + \sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix}\right]' S_1 \left[\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \delta_{itot} \end{vmatrix}\right]$$

Bezeichnen

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 & W_1 & 0 \\ Z_2 & 0 & W_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

so ist

$$R_1^2 = Y' (I - AS_A^{-1}A') \cdot Y$$

Von der Matrix dieser quadratischen Form sieht man leicht, daß sie symmetrisch und idempotent ist, z.B. durch direktes Ausrechnen oder dadurch, daß man $(I - AS_A^{-1}A')$ als den Projektionsoperator beachtet, der in den zum Spaltenraum A orthogonalen Raum projiziert. Und jeder Projektionsoperator ist symmetrisch und idempotent. Somit (14) ist

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2 (r; \lambda)$$

verteilt, wobei

r = Rang $(I - AS_A^{-1}A')$ und

$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu' (I - P_A) \mu$ mit $\mu = \begin{pmatrix} X_1\beta_1 \\ X_2\beta_2 \end{pmatrix}$ und $P_A = AS_A^{-1}A'$

Um r auszurechnen, beachte man (24) , (25)

$$\begin{aligned} r &= \text{Spur } (I - AS_A^{-1}A') \\ &= \text{Spur } I - \text{Spur } AS_A^{-1}A' \\ &= \text{Spur } I - \text{Spur } S_A^{-1}A'A \\ &= \text{Spur } I - \text{Spur } I_A \end{aligned}$$

$$= n_1 + n_2 - [q + 2(p - q)]$$

$$= n_1 + n_2 + q - 2p$$

Wir zeigen jetzt, daß alle Voraussetzungen zu (15) erfüllt sind. Es gelten

$$R_1^2 = Y'A_1Y ,$$

$$R_0^2 = Y'A_2Y ,$$

wobei

$$A_1 = I - AS_A^{-1}A' , \quad A_2 = \begin{vmatrix} (I - X_1S_1^{-1}X_1'), & 0 \\ 0 & ,(I - X_2S_2^{-1}X_2') \end{vmatrix} , \quad Y = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix}$$

Es muß noch

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right] = Y'A_3Y$$

mit geeigneter Matrix A_3 nachgewiesen werden. Es sind

$$\hat{\beta}_1 = (S_1^{-1}X_1' , 0)\, Y ,$$

$$\hat{\beta}_2 = (0 , S_2^{-1}X_2')\, Y ,$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1tot} \\ \hat{\delta}_{2tot} \end{vmatrix} = S_A^{-1}A' \cdot Y \quad , \quad \text{also}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 , & 0 , 0 \\ 0 , 1 , 0 \end{vmatrix} S_A^{-1}A'Y = B_3Y$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{2tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 , 0 , 0 \\ 0 , 0 , 1 \end{vmatrix} S_A^{-1}A'Y = B_4Y ,$$

somit ist

$$\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} = C_i Y \quad , \text{also}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right] = Y'A_3Y$$

Jetzt braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die quadratische Form

$Y'A_3Y$ positiv (semi-) definit ist und daß

$$\frac{1}{\sigma^2} Y'A_1Y \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sigma^2} Y'A_2Y$$

χ'^2 verteilt sind. Die letzteren Eigenschaften

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2 (n_1 + n_2 + q - 2p ; \lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 (n_1 + n_2 - 2p)$$

sind bereits nachgewiesen worden. Und $Y'A_3Y$ ist deshalb positiv definit, weil die Matrizen S_1 und S_2 diese Eigenschaft haben. Insgesamt wurden alle Voraussetzungen zu (15) als gültig nachgewiesen. Folglich sind

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 (n_1 + n_2 - 2p)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right] \sim \chi'^2 (q ; \lambda)$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]}{R_0^2} \sim F'[q, n_1+n_2-2p; \lambda]$$

verteilt. Wir zeigen noch, daß $\lambda = 0$ genau dann ist, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$.

Dazu schreiben wir λ in der Form

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} [(I - P_A) \mu]' \cdot [(I - P_A) \mu],$$

was zulässig ist, da $(I - P_A)$ als Projektionsoperator symmetrisch und idempotent

ist. Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$(I - P_A)\,\mu = 0$$

ist, also genau dann, wenn

$$\mu = P_A \cdot \mu$$

d.h. genau dann, wenn μ im Spaltenraum A liegt; denn P_A ist der Projektionsoperator, der in diesen Raum projiziert. Somit ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\mu = A \cdot \alpha$$

mit einem geeigneten Vektor α gilt. Dies führt auf die Gleichung

$$\begin{vmatrix} Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 \\ Z_2\gamma_2 + W_2\delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1\alpha_0 + W_1\alpha_1 \\ Z_2\alpha_0 + W_2\alpha_2 \end{vmatrix} \quad , \text{ da}$$

$$\mu = \begin{vmatrix} X_1\beta_1 \\ X_2\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 \\ Z_2\gamma_2 + W_2\delta_2 \end{vmatrix} \quad \text{und}$$

$$A \cdot \alpha = \begin{vmatrix} Z_1 & W_1 & 0 & \alpha_0 \\ Z_2 & 0 & W_2 & \alpha_1 \\ & & & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1\alpha_0 + W_1\alpha_1 \\ Z_2\alpha_0 + W_2\alpha_2 \end{vmatrix}$$

Deshalb ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$Z_1(\gamma_1 - \gamma_0) + W_1(\delta_1 - \alpha_1) = 0$$

$$Z_2(\gamma_2 - \gamma_0) + W_2(\delta_2 - \alpha_2) = 0 \ ,$$

also genau dann, wenn

$$X_1 \begin{pmatrix} \gamma_1 - \gamma_0 \\ \delta_1 - \alpha_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und}$$

$$X_2 \begin{pmatrix} \gamma_2 - \gamma_0 \\ \delta_2 - \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

Durch linksseitiges Multiplizieren mit $S_1^{-1}X_1'$ bzw. $S_2^{-1}X_2'$ ergeben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\lambda = 0$, nämlich

$$\gamma_1 = \gamma_0$$
$$\delta_1 = \alpha_1$$
$$\gamma_2 = \gamma_0$$
$$\delta_2 = \alpha_2$$

d.h. $\gamma_1 = \gamma_2$, wobei δ_1 und δ_2 jeden beliebigen Wert annehmen dürfen. Dies (8) liefert den gesuchten notwendigen und hinreichenden Test für unsere Nullhypothese ; er kann in der Form

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix}\right]}{\sum_i R_{0i}^2} \sim F_{q, n_1 + n_2 - 2p}$$

geschrieben werden. Auch in dieser Form ist er auf mehrere Modelle übertragbar.

3122. $k \geq 2$ Regressionsmodelle.

31221. Vergleich aller Parameter.

Wir suchen einen Test, der bei den Modellen

$$Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1$$
$$\vdots$$
$$Y_k = X_k \beta_k + e_k$$

die Nullhypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

prüft. Im Spezialfall $k = 2$ ergab sich u.a. der Test in einer Form

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{2} R_{0i}^2} \sim F_{p, n_1 + n_2 - 2p} ,$$

in welcher er auf mehrere Modelle übertragen werden kann. Zum Beweise gehen

wir von

$$Q = {}_{Def} \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})$$

$$= [\,(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})', \ldots, (\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{tot})'\,] \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix}$$

aus. Das totale Modell unter Nullhypothese lautet

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{vmatrix} \cdot \beta_{tot} + e \qquad , \text{ d.h.}$$

$$Y = X_{tot}\beta_{tot} + e$$

somit (1) ist

$$\hat{\beta}_{tot} = S_{tot}^{-1} X_{tot}' Y$$

$$= (X_1'X_1 + \ldots + X_k'X_k)^{-1}(X_1'Y_1 + \ldots + X_k'Y_k)$$

$$= (S_1 + \ldots + S_k)^{-1}(S_1\hat{\beta}_1 + \ldots + S_k\hat{\beta}_k)\,,$$

woraus ferner

$$\hat{\beta}_{tot} = (S_1 + \ldots + S_k)^{-1} \cdot (S_1\beta_1 + \ldots + S_k\beta_k)$$

folgt, da der Erwartungswert ein linearer Operator ist und da die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate bias-frei sind. Dieses Ergebnis werden wir an späterer Stelle benutzen. Setzen wir

$$S = {}_{Def} S_1 + S_2 + \ldots + S_k \quad ,$$

so ist

$$\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot} = [\,(0, \ldots, 0, S_i^{-1}, 0, \ldots, 0) - S^{-1}(I, \ldots, I)\,] \begin{vmatrix} S_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ S_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix} \quad ,$$

also

$$Q = \begin{vmatrix} S_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ S_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix}' \cdot A \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot A \cdot \begin{vmatrix} S_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ S_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix}$$

wobei die symmetrische Matrix A die folgende ist

$$A = \begin{vmatrix} S_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k^{-1} \end{vmatrix} - \tilde{S}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad \tilde{S}^{-1} = {}_{Def} \begin{vmatrix} S^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S^{-1} \end{vmatrix}$$

Es ist (2) , (11)

$$T = {}_{Def} \begin{vmatrix} S_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ S_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix} \sim N_k \cdot {}_p \left[\begin{vmatrix} S_1\beta_1 \\ \vdots \\ S_k\beta_k \end{vmatrix} ; \sigma^2 \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \right]$$

verteilt; folglich (16) ist

$$\frac{1}{\sigma^2} T' C T \sim \chi'^2 (r ; \lambda)$$

genau dann verteilt, wenn

$$C \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot C = C$$

ist; in diesem Falle sind

$$r = \text{Rang } C$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \begin{vmatrix} S_1\beta_1 \\ \vdots \\ S_k\beta_k \end{vmatrix}' \cdot C \cdot \begin{vmatrix} S_1\beta_1 \\ \vdots \\ S_k\beta_k \end{vmatrix}$$

In

$$\frac{1}{\sigma^2} Q = \frac{1}{\sigma^2} T' C T$$

mit

$$C = A \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot A$$

ist diese Bedingung erfüllt; es gilt sogar $C = A$,

wie wir jetzt zeigen.

$$A \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} = I - \tilde{S}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} S_1 , \dots , S_k \\ \vdots \\ S_1 , \dots , S_k \end{vmatrix}$$

$$A \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot A = \begin{vmatrix} S_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k^{-1} \end{vmatrix} - \tilde{S}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \tilde{S}^{-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \tilde{S}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} S & \dots & S \\ \vdots & & \vdots \\ S & \dots & S \end{vmatrix} \tilde{S}^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} S_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k^{-1} \end{vmatrix} - \tilde{S}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = A ,$$

also $$C \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot C = A \cdot \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot A = C$$

Somit ist

$$\frac{1}{\sigma^2} Q \sim \chi'^2 (r \; ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \beta_{tot})' S_i (\beta_i - \beta_{tot}) \qquad \text{und}$$

r = Rang C

= Rang A

$$= \text{Rang} \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix} \cdot A ,$$

da die Multiplikation mit einer nicht-singulären Matrix den Rang nicht ändert.

$$r = \text{Rang} \left[I - \begin{vmatrix} S_1 S^{-1} & , \dots , & S_1 S^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_k S^{-1} & , \dots , & S_k S^{-1} \end{vmatrix} \right]$$

Der Rang ändert sich nicht, wenn man alle Zeilenkästen zu den letzten addiert

$$r = \text{Rang} \left[\begin{vmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ I & I & \dots & I & I \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S_1^{-1} S^{-1} & , \dots , & S_1^{-1} S^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{k-1}^{-1} S^{-1} & , \dots , & S_{k-1}^{-1} S^{-1} \\ I & , \dots , & I \end{vmatrix} \right]$$

Wiederum bleibt der Rang unverändert, wenn man von allen Spaltenkästen die letzten subtrahiert

$$r = \text{Rang} \begin{vmatrix} I \dots 0 , & -S_1^{-1}S^{-1} \\ \ddots & \\ 0 \dots I , & -S_{k-1}^{-1}S^{-1} \\ 0 \dots 0 , & 0 \end{vmatrix}$$

Also ist

$$r \leq (k-1) \cdot p$$

Andererseits ist wegen

$$\text{Det} \begin{pmatrix} I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{pmatrix} \neq 0$$

der Rang

$$r \geq (k-1) \cdot p ,$$

also

$$r = (k-1) \cdot p$$

Früher wurde gezeigt, daß R_0^2 von allen $\hat{\beta}_i$ unabhängig verteilt ist, somit ist R_0^2 von

$$\hat{\beta}_{tot} = S^{-1} [S_1\hat{\beta}_1 + \dots + S_k\hat{\beta}_k]$$

unabhängig verteilt, also sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) \sim \chi'^2[(k-1) \cdot p ; \lambda] ,$$

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

unabhängig verteilt. Deshalb (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F'[(k-1) \cdot p, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p ; \lambda]$$

verteilt. Wir zeigen, daß $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$$

Es ist $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, wobei

$$\lambda_i = \frac{1}{2\sigma^2} (\beta_i - \beta_{tot})' S_i (\beta_i - \beta_{tot})$$

Da alle S_i eigentlich positiv definit sind, gilt $\lambda_i \geq 0$ und $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0 ,$$

also genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_{tot} \\ &\vdots \\ \beta_k &= \beta_{tot} \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß diese Bedingung mit der folgenden äquivalent ist

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

Erstens: sei

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k ,$$

so ist

$$\begin{aligned} \beta_{tot} &= S^{-1} (S_1 \beta_1 + \ldots + S_k \beta_k) \\ &= S^{-1} (S_1 + \ldots + S_k) \beta_1 \\ &= \beta_1 \qquad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k . \end{aligned}$$

Zweitens: sei

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_{tot} \\ &\vdots \\ \beta_k &= \beta_{tot} , \end{aligned}$$

dann ist natürlich

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i} \sim F_{(k-1)\cdot p,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

Interpretation des Tests:

Es wurde bereits gezeigt, daß sich Q folgendermaßen darstellen läßt

$$Q = \begin{vmatrix} S_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ S_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix}' \cdot \left[\begin{vmatrix} S_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k^{-1} \end{vmatrix} - S^{-1} \begin{vmatrix} I & \dots & I \\ \vdots & & \vdots \\ I & \dots & I \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} S_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ S_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix}' \cdot \left[\begin{vmatrix} I - X_1 S^{-1} X_1', \dots, -X_1 S^{-1} X_k' \\ \vdots \\ -X_k S^{-1} X_1', \dots, I - X_k S^{-1} X_k' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (I - X_1 S_1^{-1} X_1') & & \\ & \ddots & \\ & & (I - X_k S_k^{-1} X_k') \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix}$$

$$= R_1{}^2 - R_0{}^2 ,$$

wobei $R_1{}^2$ die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und $R_0{}^2$ diejenige ohne H_0 bezeichnen ; denn

$$R_0{}^2 = \sum_{i=1}^{k} R_{0\,i}{}^2 = \sum_{i=1}^{k} Y_i' (I - X_i S_i^{-1} X_i') Y_i$$

$$R_1{}^2 = Y'(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X_{tot}') Y$$

$$= \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix}' \cdot \left[I - \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{vmatrix} \cdot (X_1'X_1 + \dots + X_k'X_k)^{-1} (X_1', \dots, X_k') \right] \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} I - X_1 S^{-1} X_1', \dots, -X_1 S^{-1} X_k' \\ \vdots \\ -X_k S^{-1} X_1', \dots, I - X_k S^{-1} X_k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix}$$

Deshalb kann man den Test folgendermaßen schreiben

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{R_1{}^2 - R_0{}^2}{R_0{}^2} \sim F_{(k-1)\cdot p,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

und somit aus einer Varianzanalysen - Tabelle aufbauen. In ihr führen wir die

folgende Bezeichnung ein

$$X_{tot} = \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{vmatrix}$$

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	Q.S./df	F
mit H_0	$R_1^2 = Y'(I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X_{tot}')Y$	$n-p$		
ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i' Y_i - \hat{\beta}'_1 X_1' Y_1)$	$n-k\cdot p$	$\frac{R_0^2}{n-k\cdot p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{k(k-1)\cdot p, n-k\cdot p}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	$(k-1)\cdot p$	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{(k-1)\cdot p} = b$	$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Diese Interpretation des Tests regt einen weiteren Beweis desselben an. Wir gehen von der folgenden Zerlegung aus

$$Y - X_{tot}\hat{\beta}_{tot} = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ Y_k - X_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) \\ \vdots \\ X_k(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_{tot}) \end{vmatrix}$$

Hierbei stehen die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht, da

$$(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'X_1 = Y_1'X_1 - \hat{\beta}_1'S_1 = 0$$

Somit ist

$$(Y - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})'\cdot(Y - X_{tot}\hat{\beta}_{tot}) = \sum_{i=1}^{k}(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1) + \sum_{i=1}^{k}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})'S_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}),$$

also

$$\frac{1}{\sigma^2}R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2}R_0^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})'S_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})$$

Wir zeigen, daß alle Voraussetzungen zu (15) erfüllt sind.

$$R_1^2 = Y'M_1Y$$
$$R_0^2 = Y'M_2Y,$$

wobei

$$M_1 = I - X_{tot}S_{tot}^{-1}X_{tot}'$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} (I - X_1 S_1^{-1} X_1') & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (I - X_k S_k^{-1} X_k') \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{tot} = S^{-1} (X_1' Y_1 + \ldots + X_k' Y_k)$$

$$= S^{-1} (X_1', \ldots, X_k') Y$$

$$\hat{\beta}_1 = (0, \ldots, 0, S_1^{-1} X_1', 0, \ldots, 0) Y ,$$

also

$$\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) = Y' M_3 Y$$

mit geeigneter Matrix M_3 . Es wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

verteilt ist. Da

$$M_1 = I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X_{tot}' = I - P_{X_{tot}}$$

idempotent ist, ist (14)

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} Y' M_1 Y \sim \chi'^2 (r ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$r = \text{Rang} (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X_{tot}')$$

$$= \text{Spur} (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X_{tot}')$$

$$= \text{Spur } I - \text{Spur } X_{tot} S_{tot}^{-1} X_{tot}'$$

$$= \text{Spur } I - \text{Spur } S_{tot}^{-1} X_{tot}' X_{tot}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i - p$$

und

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\beta_1 - \beta_{tot})' S_1 (\beta_1 - \beta_{tot})$$

Insgesamt haben wir alle Voraussetzungen zu (15) als gültig nachgewiesen,

also sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) \sim \chi'^2 [(k-1) \cdot p ; \lambda]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F' [(k-1)p, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p ; \lambda]$$

verteilt. Es wurde bereits gezeigt, daß $\lambda = 0$ genau dann ist, wenn

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

Dies (8) liefert den gesuchten notwendigen und hinreichenden Test für unsere Nullhypothese ; er lautet

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{(k-1)p, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

31222. Vergleich nur einiger Parameter, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Wir suchen bei den Modellen

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \beta_1 + e_1 = Z_1 \gamma_1 + W_1 \delta_1 + e_1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y_k &= X_k \beta_k + e_k = Z_k \gamma_k + W_k \delta_k + e_k \end{aligned}$$

einen Test, der die Nullhypothese

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$, wobei die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ außer acht bleiben,

Test

$$\frac{n_1+n_2-2p}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})}{\sum_{i=1}^{2} R_{0i}^2} \sim F_{q,\, n_1+n_2-2p} ,$$

wobei

$$V_i^{-1} = Z_i' \left[I - W_i (W_i' W_i)^{-1} W_i' \right] Z_i$$

In dieser Form ist er auf mehrere Modelle übertragbar ; wir vermuten deshalb, daß der gesuchte Test so

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{(k-1)\cdot q,\, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

aussehen wird. Zum Beweise berechnen wir zunächst $\hat{\gamma}_{tot}$. Das totale Modell unter Nullhypothese lautet

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & W_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ Z_k & 0 & 0 & \dots & W_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{tot} \\ \delta_{1\,tot} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{k\,tot} \end{pmatrix} + e \qquad \text{bzw.}$$

$$Y_{tot} = (Z_{tot}, W_{tot}) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{tot} \\ \delta_{tot} \end{pmatrix} + e \qquad \text{wobei}$$

$$Y_{tot} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_k \end{pmatrix}, \quad Z_{tot} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_k \end{pmatrix}, \quad W_{tot} = \begin{pmatrix} W_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & W_k \end{pmatrix}$$

Wir zerlegen

$$Z_{tot} = G_{tot} + H_{tot} ,$$

wobei H_{tot} die Komponente von Z_{tot} bezeichnet, die im Spaltenraum W_{tot}

liegt und G_{tot} diejenige aus dem Orthogonalraum zum Spaltenraum W_{tot}.

Deshalb sind

$$H_{tot} = P_{W tot}\, Z_{tot} = \begin{vmatrix} P_{W_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{W_k} \end{vmatrix} \cdot Z_{tot} \qquad \text{und}$$

$$G_{tot} = (I - P_{W tot})\, Z_{tot}$$

Hierbei ist

$$P_{W tot} = W_{tot} \cdot (W'_{tot} \cdot W_{tot})^{-1} W_{tot}$$

$$= \begin{vmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_1'W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k'W_k \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} W_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} W_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (W_1'W_1)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (W_k'W_k)^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_k(W_k'W_k)^{-1}W_k' \end{vmatrix},$$

also

$$P_{W tot} = \begin{vmatrix} P_{W_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{W_k} \end{vmatrix}$$

Bezeichnen $\quad L_{tot} =_{Def} (I - P_{W tot})\, Z_{tot}$

$$\tau_{tot} =_{Def} (W'_{tot} W_{tot})^{-1} W'_{tot} Z_{tot}\, \gamma_{tot} + \delta_{tot},$$

so handelt es sich bei

$$Y_{tot} = L_{tot}\, \gamma_{tot} + W_{tot}\, \tau_{tot} + e$$

um ein orthogonales Modell, da

$$L'_{tot}\, W_{tot} = Z'_{tot}\,(I - P_{W tot})\, W_{tot}$$

$$= Z'_{tot}\,(W_{tot} - W_{tot})$$

$$= 0$$

denn jeder Projektionsoperator ist symmetrisch:

$$P'_{W tot} = P_{W tot}$$

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$\hat{\gamma}_{tot} = (L'_{tot} L_{tot})^{-1} L'_{tot}\, Y_{\perp W tot}$$

ist. Hierbei ist

$$L_{tot} = (I - P_{W tot})\, Z_{tot} = \left[I - \begin{vmatrix} P_{W_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{W_k} \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (I - P_{W_1})\, Z_1 \\ \vdots \\ (I - P_{W_k})\, Z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \end{vmatrix} ,$$

also

$$(L'_{tot}\, L_{tot})^{-1} = (L_1'L_1 + L_2'L_2 + \ldots + L_k'L_k)^{-1},$$

also

$$\hat{\gamma}_{tot} = (L_1'L_1 + \ldots + L_k'L_k)^{-1}\,(L_1', \ldots, L_k') \cdot \begin{vmatrix} (I - P_{W_1})\, Y_1 \\ \vdots \\ (I - P_{W_k})\, Y_k \end{vmatrix} ,$$

d.h.

$$\hat{\gamma}_{tot} = (L_1'L_1 + \ldots + L_k'L_k)^{-1}\,(L_1'Y_1 + \ldots + L_k'\, Y_k) ,$$

da $I - P_{W_i}$ symmetrisch und idempotent ist. Wir benutzen die Eigenschaften

$$L_i'L_i = V_i^{-1} \qquad \text{und}$$

$$L_i'Y_i = L_i'\,(I - P_{W_i})\, Y_i = L_i'\, Y_{\perp W_i} = L_i'\, L_i \cdot \hat{\gamma}_i = V_i^{-1}\, \hat{\gamma}_i$$

und erhalten

$$\hat{\gamma}_{tot} = (V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1})^{-1} \cdot (V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 + \ldots + V_k^{-1}\hat{\gamma}_k) ,$$

woraus noch

$$\gamma_{tot} = (V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1})^{-1} \cdot (V_1^{-1}\gamma_1 + \ldots + V_k^{-1}\gamma_k)$$

folgt, da der Erwartungswert ein linearer Operator ist und weil die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate biasfrei sind. Deshalb ist

$$\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_{tot} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{tot} \end{vmatrix} = B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 \\ \vdots \\ V_k^{-1}\hat{\gamma}_k \end{vmatrix} , \quad \text{wobei}$$

$$B =_{Def} \begin{vmatrix} V_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & V_k \end{vmatrix} - \tilde{V}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} I & \ldots & I \\ \vdots & & \vdots \\ I & \ldots & I \end{vmatrix} , \tilde{V}^{-1} =_{Def} \begin{vmatrix} V^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V^{-1} \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$V =_{Def} V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1} ,$$

also wegen der Symmetrie von B

$$\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot}) = (\hat{\gamma}_1' V_1^{-1}, \ldots, \hat{\gamma}_k' V_k^{-1}) B \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 \\ \vdots \\ V_k^{-1}\hat{\gamma}_k \end{vmatrix}$$

$$= T' C T ,$$

wobei

$$T =_{Def} \begin{vmatrix} V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 \\ \vdots \\ V_k^{-1}\hat{\gamma}_k \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad C =_{Def} B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot B$$

gesetzt wurden. Es ist (11)

$$V_i^{-1}\hat{\gamma}_i \sim N_q (V_i^{-1}\gamma_i ; \sigma^2 V_i^{-1} V_i V_i^{-1}) \sim N_q (V_i^{-1}\gamma_i ; \sigma^2 V_i^{-1}) ; \; i = 1, \ldots, k ;$$

verteilt. Und die $\hat{\gamma}_i$ sind unabhängig verteilt, da sie auf unabhängigen Stichproben beruhen, somit ist

$$T \sim N_{k \cdot q} \left[\begin{vmatrix} V_1^{-1}\gamma_1 \\ \vdots \\ V_k^{-1}\gamma_k \end{vmatrix} ; \sigma^2 \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \right]$$

verteilt. Deshalb (16) lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} T'C\,T \sim \chi'^2(r;\lambda)$$

verteilt sei:

$$C \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot C = C ;$$

in diesem Falle sind

$$r = \text{Rang } C$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \gamma_{tot})' V_i^{-1} (\gamma_i - \gamma_{tot})$$

Nun ist diese Bedingung tatsächlich erfüllt, da

$$B = \begin{vmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{vmatrix} - \tilde{V}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 \dots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \dots 1 \end{vmatrix} ,$$

also

$$B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} = 1 - \tilde{V}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1}, \dots, V_k^{-1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ V_1^{-1}, \dots, V_k^{-1} \end{vmatrix} ,$$

also

$$B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot B = \begin{vmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{vmatrix} - \tilde{V}^{-1} \begin{vmatrix} 1 \dots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \dots 1 \end{vmatrix} - \tilde{V}^{-1} \begin{vmatrix} 1 \dots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \dots 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \tilde{V}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} V & \dots & V \\ \vdots & & \\ V & \dots & V \end{vmatrix} \tilde{V}^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{vmatrix} - \tilde{V}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} I & \dots & I \\ \vdots & & \vdots \\ I & \dots & I \end{vmatrix} = B$$

d.h.

$$C = B ,$$

also

$$C \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot C = B \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} B$$

$$= B \cdot \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot B$$

$$= C$$

Somit ist

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot}) \sim \chi'^2 (r ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i - \gamma_{tot})' V_i^{-1} (\gamma_i - \gamma_{tot})$$

und

$$r = \text{Rang } C = \text{Rang } B ,$$

da $C = B$,

also

$$r = \text{Rang} \begin{vmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot B ,$$

da der Rang gegenüber der Multiplikation mit einer nicht-singulären Matrix invariant ist. Also ist

$$r = \text{Rang} \left[I - \begin{vmatrix} V_1^{-1}V^{-1}, \dots, V_1^{-1}V^{-1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ V_k^{-1}V^{-1}, \dots, V_k^{-1}V^{-1} \end{vmatrix} \right]$$

Der Rang ändert sich nicht, wenn man alle Zeilenkästen zu den letzten addiert:

$$r = \text{Rang} \left[\begin{vmatrix} I & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & I & 0 \\ I & \dots & I \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} V_1^{-1}V^{-1}, \dots, V_1^{-1}V^{-1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ V_{k-1}^{-1}V^{-1}, \dots, V_{k-1}^{-1}V^{-1} \\ I \quad , \dots , \quad I \end{vmatrix} \right]$$

Widerum ändert sich der Rang nicht, wenn wir von allen Spaltenkästen die letzten subtrahieren:

$$r = \text{Rang} \left[\begin{vmatrix} I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \dots 0, & V_1^{-1}V^{-1} \\ \vdots \qquad & \vdots \\ 0 \dots 0, & V_{k-1}^{-1}V^{-1} \\ 0 \dots 0, & I \end{vmatrix} \right]$$

$$= \text{Rang} \begin{vmatrix} I \dots 0, & -V_1^{-1}V^{-1} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ 0 \dots I, & -V_{k-1}^{-1}V^{-1} \\ 0 \dots 0, & 0 \end{vmatrix}$$

Wegen

$$\text{Det} \begin{vmatrix} I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{vmatrix} \neq 0$$

ist

$$r \geq \text{Rang} \begin{vmatrix} I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{vmatrix} = (k-1) \cdot q$$

Andererseits ist

da die obige letzte Zeile aus lauter (k-1) - reihigen Nullmatrizen besteht,

also ist

$$r = (k-1) \cdot q$$

Früher wurde gezeigt, daß

$$R_0 = \sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2$$

von allen $\hat{\gamma}_i$ und somit auch von

$$\hat{\gamma}_{tot} = (V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1})^{-1}(V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 + \ldots + V_k^{-1}\hat{\gamma}_k)$$

unabhängig verteilt ist, also sind

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}(\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})'V_i^{-1}(\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot}) \sim \chi'^2[(k-1)\cdot q;\ \lambda] \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}R_0^2 \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p\right)$$

unabhängig verteilt. Deshalb (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{(k-1)\cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k}(\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})'V_i^{-1}(\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})}{R_0^2} \sim F'[(k-1)\cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p;\ \lambda]$$

verteilt. Wir zeigen nun, daß $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$$

Es ist

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad ,$$

wobei

$$\lambda_i = \frac{1}{2\sigma^2}(\gamma_i - \gamma_{tot})'V_i^{-1}(\gamma_i - \gamma_{tot})$$

Nun (31) sind alle V_i^{-1} eigentlich positiv definite Matrizen, folglich sind

alle $\lambda_i \geqslant 0$ und $\lambda_i = 0$ genau dann, wenn $\gamma_i = \gamma_{tot}$.

Somit ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_{tot} \\ &\vdots \\ \gamma_k &= \gamma_{tot} \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist mit

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$$

äquivalent; denn sei erstens

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_{tot} \\ &\vdots \\ \gamma_k &= \gamma_{tot} \quad , \end{aligned}$$

dann ist

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k \ (= \gamma_{tot}) \ .$$

Sei zweitens

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k \quad ,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \gamma_{tot} &= (V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1})^{-1}(V_1^{-1}\gamma_1 + \ldots + V_k^{-1}\gamma_k) \\ &= (V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1})^{-1}(V_1^{-1} + \ldots + V_k^{-1})\,\gamma_1 \\ &= \gamma_1 \quad ; \quad i = 1, \ldots, k \ . \end{aligned}$$

Also sind beide Bedingungen äquivalent. Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$$

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$, wobei $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ außer acht bleiben, gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_{tot})' V_i^{-1} (\hat{\gamma}_i - \gamma_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_0^{\,2}{}_i} \sim F_{(k-1)\cdot q,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist. Hierbei sind

$$V_i^{-1} = Z'_i[I - W_i(W_i'W_i)^{-1}W_i']Z_i \ ; \ i = 1, 2, \ldots, k \ .$$

Interpretation des Tests:

Es wurde bereits gezeigt, daß sich Q folgendermaßen darstellen läßt

$$Q = T'CT = T'BT$$

$$= \begin{vmatrix} V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 \\ \vdots \\ V_k^{-1}\hat{\gamma}_k \end{vmatrix}' \left[\begin{vmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{vmatrix} - \tilde{V}^{-1} \begin{vmatrix} 1 \ldots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \ldots 1 \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} V_1^{-1}\hat{\gamma}_1 \\ \\ V_k^{-1}\hat{\gamma}_k \end{vmatrix}$$

Wir benutzen die Relation

$$\hat{\gamma}_i = (L'_i L_i)^{-1} L'_i Y_{\perp Wi}$$

$$= V_i L'_i Y_{\perp Wi} \quad ,$$

also

$$V_i^{-1}\hat{\gamma}_i = L'_i Y_{\perp Wi}$$

und erhalten

$$Q = \begin{vmatrix} Y_{\perp W1} \\ \vdots \\ Y_{\perp Wk} \end{vmatrix}' \left[\begin{vmatrix} I - L_1 V^{-1} L'_1, \ldots, & -L_1 V^{-1} L'_k \\ \vdots & \vdots \\ -L_k V^{-1} L'_1, \ldots, & I - L_k V^{-1} L'_k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} I - L_1 V_1 L'_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & I - L_k V_k L_k' \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} Y_{\perp W1} \\ \vdots \\ Y_{\perp Wk} \end{vmatrix}$$

$$= Y'_{\perp W tot}[I - L_{tot}(L'_{tot}L_{tot})^{-1}L'_{tot}]Y_{\perp W tot} - \sum_{i=1}^{k} Y'_{\perp Wi}[I - L_i(L'_i L_i)^{-1}L'_i]Y_{\perp Wi}$$

denn

$$L_{tot} \cdot (L'_{tot}L_{tot})^{-1}L'_{tot} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \end{vmatrix} \cdot (L'_1 L_1 + \ldots + L'_k L_k)^{-1}(L'_1, \ldots, L'_k)$$

$$= \begin{vmatrix} L_1 V^{-1} L'_1, \ldots, & L_1 V^{-1} L'_k \\ \vdots & \vdots \\ L_k V^{-1} L'_1, \ldots, & L_k V^{-1} L'_k \end{vmatrix}$$

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$R_0{}^2{}_i = Y'_{\perp Wi}[I - L_i(L'_i L_i)^{-1}L'_i]Y_{\perp Wi} \quad ; \quad i=1,\ldots,k \; ;$$

und

$$R_1{}^2 = Y_{\perp W tot}[I - L_{tot}(L'_{tot}L_{tot})^{-1}L'_{tot}]Y_{\perp W tot}$$

Somit ist

$$Q = R_1{}^2 - \sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i$$

$$= R_1{}^2 - R_0{}^2 \quad ,$$

wobei $R_1{}^2$ die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und $R_0{}^2$ diejenige ohne H_0 bezeichnen. Und der Test läßt sich so schreiben.

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot q} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{(k-1)\cdot q,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

Deshalb läßt er sich aus einer Varianzanalysen - Tabelle aufbauen.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
Mit H_0	$R_1^2 = Y'(I - AS_A^{-1}A')Y$	$n-k\cdot p+(k-1)q$		
Ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y_i'Y_i - \hat{\beta}_i'X_i'Y_i)$	$n - k \cdot p$	$\frac{R_0^2}{n-k\cdot p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{(k-1)\cdot q,\, n-kp\cdot}$ $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	$(k-1)\cdot q$	$\frac{R_1^2-R_0^2}{(k-1)\cdot q} = b$	

wobei

$$A = \begin{vmatrix} Z_1 & W_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_k & 0 & & W_k \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix};$$

denn das totale Modell unter Nullhypothese lautet

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1 & W_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_k & 0 & & W_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{tot} \\ \delta_{1\,tot} \\ \vdots \\ \delta_{k\,tot} \end{vmatrix} + e,$$

also (1) ist

$$R_1^2 = Y'(I - AS_A^{-1}A')\,Y$$

Und diese Interpretation des Tests ermöglicht es, für ihn einen weiteren Beweis anzugeben. Dazu zerlegen wir

$$Y - A \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{k\,tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 - Z_1\hat{\gamma}_{tot} - W_1\hat{\delta}_{1\,tot} \\ \vdots \\ Y_k - Z_k\hat{\gamma}_{tot} - W_k\hat{\delta}_{k\,tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ Y_k - X_k\hat{\beta}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1\left[\hat{\beta}_1 - \begin{matrix}\hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot}\end{matrix}\right] \\ \vdots \\ X_k\left[\hat{\beta}_k - \begin{matrix}\hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{k\,tot}\end{matrix}\right] \end{vmatrix}$$

Die beiden Vektoren der rechten Seite stehen aufeinander senkrecht, da

$$(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'X_1 = Y_1'X_1 - \hat{\beta}_1'S_1 = 0$$

Folglich ist

$$\left[Y - A \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{k\,tot} \end{vmatrix}\right]' \cdot \left[Y - A \cdot \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{k\,tot} \end{vmatrix}\right] = \sum_{i=1}^{k}(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1) + \sum_{i=1}^{k}\left[\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \end{vmatrix}\right]'S_1\left[\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \end{vmatrix}\right]$$

also

$$\frac{1}{\sigma^2}R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2}R_0^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\left[\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \end{vmatrix}\right]'S_1\left[\hat{\beta}_1 - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \end{vmatrix}\right]$$

Wir zeigen nun, daß in dieser Relation alle Voraussetzungen zu (15) erfüllt sind

$$R_1^2 = Y'M_1Y$$

$$R_0^2 = Y'M_2Y \quad ,$$

wobei

$$M_1 = I - AS_A^{-1}A' \quad ,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} I - X_1S_1^{-1}X'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I - X_kS_k^{-1}X'_k \end{vmatrix}$$

Da

$$\hat{\beta}_1 = (0,\ldots,0,S_1^{-1}X'_1,0,\ldots,0)Y = B_1Y \qquad \text{und}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{1\,tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0,\ldots,0 \\ 0,0,\ldots,1,\ldots,0 \end{vmatrix} \cdot S_A^{-1}A'Y = C_1Y \quad ,$$

gilt ferner

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right] = Y' M_3 Y$$

mit geeigneter Matrix M_3 . Es ist

$$Y \sim N \sum_{i}^{k} n_i \left[\begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ \vdots \\ X_k \beta_k \end{vmatrix} ; \sigma^2 I \right]$$

verteilt und $M_1 = I - A S_A^{-1} A'$ eine symmetrische und idempotente Matrix, folglich (14) ist

$$\frac{1}{\sigma^2} Y' M_1 Y = \frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2(r ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu' (I - A S_A^{-1} A') \mu \quad \text{mit} \quad \mu = \begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ \vdots \\ X_k \beta_k \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} r &= \text{Rang } M_1 \\ &= \text{Spur } M_1 \\ &= \text{Spur } I - \text{Spur } A S_A^{-1} A' \\ &= \text{Spur } I - \text{Spur } S_A^{-1} A' A \\ &= \sum_{i}^{k} n_i - [q + k \cdot (p - q)] \ , \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p + (k-1) \cdot q ; \lambda \right)$$

verteilt. Es wurde bereits bewiesen, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

verteilt ist. Da alle S_i positiv definit sind, ist

$$\frac{1}{\sigma^2} Y' M_3 Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]$$

eine positiv definite quadratische Form. Insgesamt haben wir alle Voraus-

setzungen zu (15) als gültig nachgewiesen und folgern, daß

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}\left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix}\hat{\gamma}_{tot}\\ \hat{\delta}_{i\,tot}\end{vmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix}\hat{\gamma}_{tot}\\ \hat{\delta}_{i\,tot}\end{vmatrix}\right] \sim \chi'^2\,[(k-1)\cdot q\,;\,\lambda\,]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^{\,2} \sim \chi^2\,(\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p)$$

unabhängig verteilt sind. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{(k-1)\cdot q}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{k}\left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix}\hat{\gamma}_{tot}\\ \hat{\delta}_{i\,tot}\end{vmatrix}\right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix}\hat{\gamma}_{tot}\\ \hat{\delta}_{i\,tot}\end{vmatrix}\right]}{R_0^{\,2}} \sim F'[(k-1)\cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p\,;\,\lambda]$$

verteilt. Wir zeigen, daß $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$$

Bezeichnet

$$P_A = A\cdot S_A^{-1}\cdot A'$$

den Projektionsoperator, der in den Spaltenraum A projiziert, so ist mit P_A auch $I - P_A$ symmetrisch und idempotent. Deshalb kann λ auch so geschrieben werden

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}[(I - P_A)\,\mu\,]'[(I - P_A)\,\mu\,]$$

Also ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$(I - P_A)\,\mu = 0\,,$$

also genau dann, wenn

$$\mu = P_A\cdot\mu\,,$$

also genau dann, wenn μ im Spaltenraum A liegt, also genau dann, wenn

$$\mu = A\cdot\alpha$$

mit einem geeigneten Vektor α. Das führt auf die Gleichung

$$\begin{vmatrix} Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 \\ \vdots \\ Z_k\gamma_k + W_k\delta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1\alpha_0 + W_1\alpha_1 \\ \vdots \\ Z_1\alpha_0 + W_k\alpha_k \end{vmatrix}$$

Deshalb ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$Z_1(\gamma_1 - \alpha_0) + W_1(\delta_1 - \alpha_1) = 0$$
$$\vdots$$
$$Z_k(\gamma_k - \alpha_0) + W_k(\delta_k - \alpha_k) = 0 \quad , \quad \text{also}$$

genau dann, wenn

$$X_1 \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 - \alpha_0 \\ \delta_1 - \alpha_1 \end{vmatrix} = 0 \, , \ldots , \; X_k \cdot \begin{vmatrix} \gamma_k - \alpha_0 \\ \delta_k - \alpha_k \end{vmatrix} = 0$$

Durch linksseitiges Multiplizieren mit

$$S_i^{-1} X_i' \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

ergeben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für

$\lambda = 0$, nämlich

$$\gamma_1 = \gamma_0 \quad , \quad \delta_1 = \alpha_1$$
$$\vdots$$
$$\gamma_k = \gamma_0 \quad , \quad \delta_k = \alpha_k$$

d.h. $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$, wobei die $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ jeden beliebigen Wert annehmen dürfen. Dies (8) liefert den gesuchten notwendigen und hinreichenden Test für unsere Nullhypothese ; er kann in der Form

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]' S_i \left[\hat{\beta}_i - \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{tot} \\ \hat{\delta}_{itot} \end{vmatrix} \right]}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{(k-1)\cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

geschrieben werden.

313. Prüfung der Trendänderung für zusätzliche Meßwerte .

3131. Prüfung einer Trendänderung für mehrere zusätzliche Meßwerte bei einem einzigen Modell.

Wir suchen einen Test, der bei den Modellen

$$Y_1 = X_1\beta_1 + e_1 \quad , \text{Typ } X_1 = (n_1, p) \; , \; n_1 > p \; , \text{ Rang } X_1 = p$$

$$Y_2 = X_2\beta_2 + e_2 \quad , \text{Typ } X_2 = (n_2, p) \; , \; n_2 \leq p \; (!) \; , \text{ Rang } X_2 = n_2$$

mit unabhängigen Y_1 , Y_2 die Nullhypothese

$$H_0 : X_2\beta_2 = X_2\beta_1$$

prüft. CHOW (1960) hat diesen Test gefunden, indem er von dem Vektor

$$Y_2 - X_2\hat{\beta}_1$$

ausging. Wir übernehmen seine Beweisidee. Es ist (11)

$$X_2\hat{\beta}_1 \sim N_{n2}(X_2\beta_1 \; ; \; \sigma^2 X_2 S_1^{-1} X'_2)$$

verteilt. $\hat{\beta}_1$ hängt verteilungsmäßig nur von Y_1 ab. Da Y_1 und Y_2 unabhängig verteilt sind, sind $X_2\hat{\beta}_1$ und

$$Y_2 \sim N_{n2}(X_2\beta_2 \; ; \; \sigma^2 I)$$

unabhängig verteilt, also (12) ist der Vektor

$$(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1) \sim N_{n2}[X_2(\beta_2 - \beta_1) \; ; \; \sigma^2(I + X_2 S_1^{-1} X'_2)]$$

verteilt. Hierin ist die Matrix $X_2 S_1^{-1} X'_2$ eigentlich positiv definit; denn sei

$$\mathfrak{k}' X_2 S_1^{-1} X'_2 \mathfrak{k} = 0$$

Daraus folgt

$$X'_2 \mathfrak{k} = 0$$

da S_1^{-1} eigentlich positiv definit ist. Weiter gilt

$$X_2 X'_2 \mathfrak{k} = 0$$

Wegen

$$\text{Rang } X_2 = \text{Rang } X_2 X'_2$$

gilt

$$\text{Rang } X_2X'_2 = n_2$$

Da

$$\text{Typ } X_2X'_2 = (n_2, n_2)$$

ist, hat die Matrix $X_2X'_2$ vollen Rang, also existiert $(X_2X'_2)^{-1}$ . .

Somit gilt $\mathfrak{x} = 0$. D.h. aus $\mathfrak{x}'X_2S_1^{-1}X'_2\mathfrak{x} = 0$ folgt $\mathfrak{x} = 0$, also ist die Matrix $X_2S_1^{-1}X'_2$ eigentlich positiv definit. Somit (30) ist auch $I + X_2S_1^{-1}X'_2$ eine eigentlich positiv definite Matrix. Folglich existiert

$$(I + X_2S_1^{-1}X'_2)^{-1}$$

Daraus (17) folgt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)'(I + X_2S_1^{-1}X'_2)^{-1}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1) \sim \chi'^2(n_2 ; \lambda)$$

verteilt ist, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(X_2\beta_2 - X_2\beta_1)'(I + X_2S_1^{-1}X'_2)^{-1}(X_2\beta_2 - X_2\beta_1)$$

R^2_0 ist (2) von $\hat{\beta}_1$ und Y_2 unabhängig verteilt ; von Y_2 deshalb, weil R_0^2 verteilungsmäßig nur von Y_1 abhängt und da Y_1 und Y_2 unabhängig verteilt sind. Folglich sind

$$\frac{1}{\sigma^2}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)'(I + X_2S_1^{-1}X'_2)^{-1}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1) \sim \chi'^2(n_2 ; \lambda) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}R_0^2 \sim \chi^2(n_1 - p)$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{n_1 - p}{n_2} \cdot \frac{(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)'(I + X_2S_1^{-1}X'_2)^{-1}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)}{R_0^2} \sim F'(n_2, n_1 - p ; \lambda)$$

verteilt. Da die Matrix

$$(I + X_2S_1^{-1}X'_2)^{-1}$$

eigentlich positiv definit ist, ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$X_2\beta_2 = X_2\beta_1$$

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : X_2\beta_2 = X_2\beta_1$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1 - p}{n_2} \cdot \frac{(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)'(I + X_2 S_1^{-1} X'_2)^{-1}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)}{R_0^2} \sim F_{n_2, n_1 - p}$$

verteilt ist.

Interpretation des Tests:

Das totale Modell unter Nullhypothese lautet

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} + e$$

$$= \begin{vmatrix} X_1\beta_1 \\ X_2\beta_2 \end{vmatrix} + e$$

$$= \begin{vmatrix} X_1\beta_1 \\ X_2\beta_1 \end{vmatrix} + e$$

$$= \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \beta_{tot} + e$$

Bezeichnen

$$X_{tot} = \text{Def} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}, \quad Y_{tot} = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix},$$

so lautet das totale Modell unter Nullhypothese

$$Y_{tot} = X_{tot}\beta_{tot} + e .$$

Also (1) gilt

$$\hat{\beta}_{tot} = S_{tot}^{-1} X_{tot}' Y_{tot} ,$$

wobei

$$S_{tot} = X'_{tot} X_{tot} = (X'_1, X'_2) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$= X'_1 X_1 + X'_2 X_2 = S_1 + S_2 ,$$

also

$$S_{tot}^{-1} = (S_1 + S_2)^{-1} \quad ,$$

folglich

$$\begin{aligned}(S_1 + S_2)\,\hat{\beta}_{tot} &= X'_1 Y_1 + X_2' Y_2 \\ &= S_1 \hat{\beta}_1 + X'_2 Y_2 \quad ,\end{aligned}$$

also

$$\hat{\beta}_1 = (I + S_1^{-1} S_2)\,\hat{\beta}_{tot} - S_1^{-1} X'_2 Y_2$$

und

$$\begin{aligned}Y_2 - X_2\hat{\beta}_1 &= Y_2 - [X_2 + X_2 S_1^{-1} X'_2 X_2]\hat{\beta}_{tot} + X_2 S_1^{-1} X_2' Y_2 \\ &= [I + X_2 S_1^{-1} X'_2\,]Y_2 - [I + X_2 S_1^{-1} X'_2\,]X_2\hat{\beta}_{tot} \\ &= [I + X_2 S_1^{-1} X'_2\,](Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})\end{aligned}$$

Bezeichnet

$$Q = {}_{Def}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1)'(I + X_2 S_1^{-1} X'_2)^{-1}(Y_2 - X_2\hat{\beta}_1) \quad ,$$

so gilt

$$\begin{aligned}Q &= (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(I + X_2 S_1^{-1} X'_2)(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) \\ &= (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})' X_2 S_1^{-1} X'_2 (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) \\ &= (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) + (X'_2 Y_2 - S_2\hat{\beta}_{tot})' S_1^{-1} S_1 S_1^{-1} (X_2' Y_2 - S_2\hat{\beta}_{tot})\end{aligned}$$

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$S_1^{-1}(X'_2 Y_2 - S_2\hat{\beta}_{tot}) = \hat{\beta}_{tot} - \hat{\beta}_1$$

ist, also ist

$$\begin{aligned}Q &= (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) + (\hat{\beta}_{tot} - \hat{\beta}_1)' S_1 (\hat{\beta}_{tot} - \hat{\beta}_1) \\ &= (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) + (X_1\hat{\beta}_{tot} - X_1\hat{\beta}_1)'(X_1\hat{\beta}_{tot} - X_1\hat{\beta}_1)\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix}' \begin{vmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix}$$

Wir zerlegen

$$(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot}) = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ X_2\hat{\beta}_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix}$$

Hierin ist

$$X_2\hat{\beta}_2 = Y_2 \quad ;$$

denn die Normalgleichungen lauten

$$X_2'X_2\hat{\beta}_2 = X'_2Y_2 \quad ,$$

daraus folgt

$$X_2X'_2X_2\hat{\beta}_2 = X_2X'_2Y_2$$

Es wurde bereits gezeigt, daß $(X_2X'_2)^{-1}$ existiert, also ist

$$X_2\hat{\beta}_2 = Y_2 \quad ,$$

also

$$(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot}) = \begin{vmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot} \end{vmatrix}$$

Wegen

$$(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'X_1 = Y'_1X_1 - \hat{\beta}'_1S_1 = 0$$

stehen die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht. Somit gilt

$$\begin{aligned}(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot}) = {} & (Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1) \\ & + (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot}) \\ & + (X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot})'(X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot}) \quad ,\end{aligned}$$

also

$$R_1^2 = R_0^2 + Q \quad , \text{d.h.} \quad Q = R_1^2 - R_0^2 \quad ,$$

da

$$\begin{aligned}R_0^2 &= (Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1) + (Y_2 - X_2\hat{\beta}_2)'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_2) \\ &= (Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1) + 0 \quad ,\end{aligned}$$

wobei R_1^2 die kleinste Summe der Abweichungsquadrate unter Nullhypothese und R_0^2 diejenige ohne H_0 bezeichnen. Deshalb kann der Test auch so geschrieben werden

$$\frac{n_1 - p}{n_2} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{n_2, n_1 - p}$$

und somit aus einer Varianzanalysen - Tabelle aufgebaut werden.

Tabelle der Varianzanalyse:

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
mit H_0	$R_1^2 = Y'_{tot}(I - X_{tot}S_{tot}^{-1}X'_{tot})Y_{tot}$	$n_1 + n_2 - p$		
ohne H_0	$R_0^2 = Y_1'Y_1 - \hat{\beta}_1'X_1'Y_1$	$n_1 - p$	$\frac{R_0^2}{n_1 - p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{n_2, n_1 - p}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	n_2	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{n_2} = b$	

wobei

$$X_{tot} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad Y_{tot} = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix}$$

Diese Testinterpretation regt einen weiteren Beweis desselben an. Es wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} R_0^2 + \frac{1}{\sigma^2} [(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})'S_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})]$$

ist. Wir zeigen jetzt, daß hierbei alle Voraussetzungen zu (15) erfüllt sind.

Es gelten

$$\hat{\beta}_{tot} = (S_1 + S_2)^{-1}(X'_1, X'_2)Y_{tot}$$

$$\hat{\beta}_1 = (S_1^{-1}X'_1, 0)Y_{tot}$$

$$Y_2 = (0, I)Y_{tot}$$

$$Y_1 = (I, 0)Y_{tot}$$

also

$$R_1^2 = Y'_{tot}A_1Y_{tot} \quad , A_1 = I - X_{tot}S_{tot}^{-1}X'_{tot}$$

$$R_0^2 = Y'_{tot} A_2 Y_{tot} \quad , \quad A_2 = \begin{vmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X'_1 & , 0 \\ 0 & , 0 \end{vmatrix}$$

$$(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot}) = Y'_{tot} A_3 Y_{tot}$$

mit geeigneter Matrix A_3. Die quadratische Form $Y'_{tot} A_3 Y_{tot}$ ist positiv definit, da S_1 positiv definit ist und es sich bei

$$(Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})$$

um das Quadrat einer Länge, also um eine nicht-negative Größe handelt. Es ist

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2(n_1 - p)$$

verteilt. Da

$$Y_{tot} \sim N_{n_1 + n_2} \left[\begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{vmatrix} ; \sigma^2 I \right]$$

verteilt ist und die Matrix A_1 idempotent und symmetrisch ist, ist (14)

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 \sim \chi'^2(r; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{vmatrix}' \cdot (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot}) \cdot \begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{vmatrix}$$

und

$$r = \text{Rang } (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot})$$

$$= \text{Spur } (I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot})$$

$$= \text{Spur } I - \text{Spur } X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot} = \text{Spur } I - \text{Spur } S_{tot}^{-1} X'_{tot} X_{tot}$$

$$= (n_1 + n_2) - p$$

Somit sind alle Voraussetzungen zu (15) als gültig nachgewiesen. Folglich sind

$$\frac{1}{\sigma^2} [(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})] \sim \chi'^2(n_2; \lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 (n_1 - p)$$

unabhängig verteilt; also (7) ist

$$\frac{n_1 - p}{n_1} \cdot \frac{[(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})' (Y_2 - X_2 \hat{\beta}_{tot})]}{} \sim F'[n_2, n_1 - p; \lambda]$$

verteilt. Wann ist $\lambda = 0$?

$$I - X_{tot} S_{tot}^{-1} X'_{tot} = I - P_{x\,tot}$$

ist als Projektionsoperator symmetrisch und idempotent; deshalb läßt sich λ so schreiben

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \left[(I - P_{x\,tot}) \begin{pmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{pmatrix} \right]' \cdot \left[(I - P_{x\,tot}) \begin{pmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{pmatrix} \right]$$

Also ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$(I - P_{x\,tot}) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{pmatrix} = 0 ,$$

also genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} X_1 \beta_1 \\ X_2 \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \cdot \alpha$$

mit einem geeigneten Vektor α gilt; denn $P_{x\,tot}$ ist der Projektionsoperator, der in den Spaltenraum $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ projiziert. Also ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$X_1 (\beta_1 - \alpha) = 0$$

$$X_2 (\beta_2 - \alpha) = 0$$

Da $(X_1' X_1)^{-1}$ existiert, ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$\beta_1 = \alpha$ beliebig ist und

$$X_2 (\beta_2 - \beta_1) = 0 ,$$

d.h. genau dann, wenn

$$X_2 \beta_2 = X_2 \beta_1$$

Dies (8) liefert den notwendigen und hinreichenden Test für unsere Nullhypothese; er lautet

$$\frac{n_1 - p}{n_2} \cdot \frac{[(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})' S_1 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + (Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})'(Y_2 - X_2\hat{\beta}_{tot})]}{R_0^2} \sim F_{n_2, n_1 - p}$$

In dieser Form läßt er sich auf mehrere Modelle und mehrere zusätzliche Meßwerte übertragen.

3132. Prüfung einer Trendänderung für genau einen zusätzlichen Meßwert bei einem einzigen Modell.

Das Modell lautet

$$Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1$$

$$y = \mathfrak{x}_0' \beta_2 + e_2$$

und die Nullhypothese

H_0 : $\mathfrak{x}_0' \beta_2 = \mathfrak{x}_0' \beta_1$

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall des vorangegangenen Testes. Da hierbei $1 + X_2 S_1^{-1} X_2'$ keine Matrix, sondern ein Skalar ist, vereinfacht sich die Testformel.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0 : $\mathfrak{x}_0' \beta_2 = \mathfrak{x}_0' \beta_1$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{(n_1 - p) \cdot (y - \mathfrak{x}_0' \hat{\beta}_1)^2}{R_0^2 \cdot (1 + \mathfrak{x}_0' S_1^{-1} \mathfrak{x}_0)} \sim F_{1, n_1 - p}$$

verteilt ist.

314. Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten und zugleich Prüfung einer Trendänderung für zusätzliche Meßwerte bei mehreren Modellen.

Wir suchen einen Test, der bei den Modellen

$$Y_1 = X_1 \cdot \beta_1 + e_1 \quad , \qquad \text{voller Rang} \quad , \quad n_1 > p$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Y_k = X_k \cdot \beta_k + e_k \quad , \qquad \text{voller Rang} \quad , \quad n_k > p$$
$$Y_{k+1} = X_{k+1} \cdot \beta_{k+1} + e_{k+1} \quad , \qquad \text{voller Rang} \quad , \quad n_{k+1} \leq p \ (!)$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Y_{k+1} = X_{k+1} \cdot \beta_{k+1} + e_{k+1} \quad , \qquad \text{voller Rang} \quad , \quad n_{k+1} \leq p \ (!)$$

die Nullhypothese

$$H_0: \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1$$
$$\vdots$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1$$

prüft. Der Spezialfall 3131 ergab den Test

$$\frac{n_1 - p}{n_2} \cdot \frac{[(\hat\beta_1 - \hat\beta_{tot})' S_1 (\hat\beta_1 - \hat\beta_{tot}) + (Y_2 - X_2\hat\beta_{tot})'(Y_2 - X_2\hat\beta_{tot})]}{R_0^2} \sim F_{n_2, n_1 - p}$$

Vermutlich lautet deshalb der gesuchte Test

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{\chi} \cdot \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} (\hat\beta_1 - \hat\beta_{tot})' S_1 (\hat\beta_1 - \hat\beta_{tot}) + \sum_{i=1}^{1} (Y_{k+1} - X_{k+1}\hat\beta_{tot})'(Y_{k+1} - X_{k+1}\hat\beta_{tot})\right]}{\sum_{i=1}^{k} R_{0_1}^2} \sim$$
$$\sim F_{\chi, n-k\cdot p}$$

wobei χ noch offen ist und $\hat\beta_{tot}$ aus dem Modell

$$Y_{tot} = X_{tot}\beta_{tot} + e$$

berechnet wird, also (1) ist

$$\hat\beta_{tot} = S_{tot}^{-1} X_{tot}' Y_{tot}$$
$$= (S_1 + \ldots + S_{k+1})^{-1} (X_1' Y_1 + \ldots + X_{k+1}' Y_{k+1}) \ ,$$

woraus

$$\beta_{tot} = (S_1 + \ldots + S_{k+1})^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} X_i' X_i \beta_i = S^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} X_i' X_i \beta_i$$

folgt ; denn der Erwartungswert ist ein linearer Operator, und es gilt

$$E\,Y_i = X_i ß_i \,; \quad i = 1, \dots , k+L$$

Bezeichnet

$$Q = \sum_{i=1}^{k} (\hat{ß}_i - \hat{ß}_{tot})' S_i (\hat{ß}_i - \hat{ß}_{tot}) + \sum_{i=1}^{l} (Y_{k+i} - X_{k+i}\hat{ß}_{tot})'(Y_{k+i} - X_{k+i}\hat{ß}_{tot}),$$

so gilt

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \left(\hat{ß}_i' S_i \hat{ß}_i - \hat{ß}_i' S_i \hat{ß}_{tot} - \hat{ß}_{tot}' S_i \hat{ß}_i + \hat{ß}_{tot}' S_i \hat{ß}_{tot} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \left(Y_{k+i}' Y_{k+i} - Y_{k+i}' X_{k+i} \hat{ß}_{tot} - \hat{ß}_{tot}' X_{k+i}' Y_{k+i} + \hat{ß}_{tot}' S_{k+i} \hat{ß}_{tot} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(Y_i' X_i S_i^{-1} X_i' Y_i - Y_i' X_i \hat{ß}_{tot} - \hat{ß}_{tot}' X_i' Y_i + \hat{ß}_{tot}' S_i \hat{ß}_{tot} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \left(Y_{k+i}' Y_{k+i} - Y_{k+i}' X_{k+i} \hat{ß}_{tot} - \hat{ß}_{tot}' X_{k+i}' Y_{k+i} + \hat{ß}_{tot}' S_{k+i} \hat{ß}_{tot} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} Y_i' X_i S_i^{-1} X_i' Y_i + \sum_{i=1}^{l} Y_{k+i}' Y_{k+i} - \left(\sum_{i=1}^{k+l} Y_i' X_i \right) \hat{ß}_{tot}$$

$$- \hat{ß}_{tot}' \cdot \sum_{i=1}^{k+l} X_i' Y_i + \hat{ß}_{tot}' \left(\sum_{i=1}^{k+l} X_i' Y_i \right)$$

$$= Y_{tot}' \cdot \left[\begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & X_k S_k^{-1} X_k' & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \; 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+l} \end{vmatrix} \cdot S^{-1} (X_1', \dots, X_{k+l}') \right] \cdot Y_{tot}$$

$$=_{Def} Y_{tot}' A\, Y_{tot} \qquad \text{und} \qquad S =_{Def} S_1 + \dots + S_{k+l}$$

Es ist

$$A^2 = \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X_1' & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & X_k S_k^{-1} X_k' & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \; 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+l} \end{vmatrix} \cdot S^{-1} (X_1', \dots, X_{k+l}')$$

$$- \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+l} \end{vmatrix} S^{-1} (X_1', \dots, X_{k+l}') + \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+l} \end{vmatrix} \cdot S^{-1} S\, S^{-1} (X_1', \dots, X_{k+l}')$$

$$= \begin{vmatrix} X_1 S_1^{-1} X'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & X_k S_k^{-1} X'_k \\ 0 & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+1} \end{vmatrix} S^{-1} (X'_1, \ldots, X'_{k+1})$$

$$= A$$

d.h.

$$A^2 = A$$

Somit (14) ist

$$\frac{1}{\sigma^2} Q \sim \chi'^2 (r ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu' A \mu \qquad \text{mit } \mu = \begin{vmatrix} X_1 \beta_1 \\ \vdots \\ X_{k+1} \beta_{k+1} \end{vmatrix}$$

und

r = Rang A

= Spur A

$$= \sum_{i=1}^{k} \text{Spur } X_i S_i^{-1} X'_i + \sum_{i=k+1}^{k+1} n_i - \sum_{i=1}^{k+1} \text{Spur } X_i S^{-1} X'_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \text{Spur } S_i^{-1} X'_i X_i + \sum_{i=k+1}^{k+1} n_i - \sum_{i=1}^{k+1} \text{Spur } S^{-1} X'_i X_i$$

$$= k \cdot p + \sum_{i=k+1}^{k+1} n_i - p$$

$$= \sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1) \cdot p$$

Da

$$Y_{tot} \sim N (\mu ; \sigma^2 I)$$

verteilt ist, lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zwei χ'^2 verteilte quadratische Formen

$\frac{1}{\sigma^2} Y'_{tot} A Y_{tot}$ und $\frac{1}{\sigma^2} Y'_{tot} B Y_{tot}$

unabhängig verteilt sind:

$$A B = 0$$

Mit Hilfe dieses bekannten Satzes läßt sich zeigen, daß

$\frac{1}{\sigma^2} Q$ und $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i$

unabhängig verteilt. Denn es ist

$$Q = Y'_{tot} A Y_{tot}$$

und

$$\sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i = Y'_{tot} B Y_{tot}$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X'_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & I - X_k S_k^{-1} X'_k & \\ & & 0 & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Tatsächlich ist

$$A \cdot B = 0 - \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} S^{-1} \cdot 0 = 0$$

Somit (7) ist wegen

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

die Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1) \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=k+1}^{k+1} (Y_i - X_i \hat{\beta}_{tot})' \cdot (Y_i - X_i \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i}$$

$$\sim F' \left[\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1) \cdot p \, , \, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p ; \lambda \right]$$

verteilt. Wann ist $\lambda = 0$? Da die Matrix A symmetrisch und idempotent ist, kann man λ so schreiben

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (A\mu)' \cdot (A\mu)$$

Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$A\mu = 0 ,$$

also genau dann, wenn

$$\begin{vmatrix} X_1\beta_1 \\ \vdots \\ X_{k+1}\beta_{k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+1} \end{vmatrix} S^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} X'_i X_i \beta_i$$

$$= \begin{vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{k+1} \end{vmatrix} \beta_{tot}$$

also genau dann, wenn

$$\begin{aligned} X_1(\beta_1 - \beta_{tot}) &= 0 \\ &\vdots \\ X_k(\beta_k - \beta_{tot}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{k+1}\beta_{k+1} &= X_{k+1}\beta_{k+1} \\ &\vdots \\ X_{k+1}\beta_{k+1} &= X_{k+1}\beta_{k+1} \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist zur Nullhypothese äquivalent. Denn sei erstens H_0 gültig, dann ist

$$\begin{aligned} \beta_{tot} &= S^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} X'_i X_i \beta_i \\ &= S^{-1} \left[\sum_{i=1}^{k} X'_i X_i \beta_\chi + \sum_{i=k+1}^{k+1} X'_i X_i \beta_\chi \right] \end{aligned}$$

wobei $\chi = 1, \ldots, k$ beliebig wählbar ist. Also ist dann

$$\beta_{tot} = S^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k+1} S_i \right) \cdot \beta_\chi = \beta_\chi ,$$

d.h.

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = \beta_{tot}$$

$$X_1(\beta_1 - \beta_{tot}) = 0$$
$$\vdots$$
$$X_k(\beta_k - \beta_{tot}) = 0$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1 = X_{k+1}\beta_{tot}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1 = X_{k+1}\beta_{tot}$$

Sei zweitens umgekehrt die obige Bedingung erfüllt; daraus folgt wegen der Existenz von S_i^{-1} für $i=1,\ldots,k$ nach Multiplikation mit $S_i^{-1}X'_i$ von links

$$\beta_1 - \beta_{tot} = 0$$
$$\vdots$$
$$\beta_k - \beta_{tot} = 0 \quad ,$$

also

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = \beta_{tot}$$

und somit

$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1$$
$$\vdots$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1 \quad ,$$

d.h. die Nullhypothese. Also ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese H_0 :

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1$$
$$\vdots$$
$$X_{k+1}\beta_{k+1} = X_{k+1}\beta_1$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1)\cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=k+1}^{k+1} (Y_i - X_i\hat{\beta}_{tot})'(Y_i - X_i\hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_0{}^2{}_i}$$

$$\sim F^{\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1)\cdot p \, , \, \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}$$

verteilt ist.

Interpretation des Tests :

Es gilt

$$Q = Y'_{tot}\left[(I - X_{tot}S^{-1}{}_{tot}X'_{tot}) - \begin{vmatrix} I - X_1S_1^{-1}X'_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I - X_kS_k^{-1}X'_k & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & 0 \end{vmatrix}\right] Y_{tot}$$

$$= R_1^2 - \sum_{i=1}^{k} Y'_i(I - X_iS_i^{-1}X'_i)Y_i$$

$$= R_1^2 - R_0^2$$

Somit kann der Test auch so geschrieben werden

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}{\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1)\cdot p} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F^{k+1}_{\sum_{i=k+1} n_i + (k-1)\cdot p,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p}$$

und deshalb aus einer Varianzanalysen - Tabelle aufgebaut werden.

Tabelle der Varianzanalyse :

Art	Q.S.	df	$\frac{Q.S.}{df}$	F
mit H_0	$R_1^2 = Y'_{tot}(I - X_{tot}S_{tot}^{-1}X'_{tot})Y_{tot}$	$\sum_{i=1}^{k+1} n_i - p$		
ohne H_0	$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k} (Y'_iY_i - \hat{\beta}'_i \cdot X'_iY_i)$	$\sum_{i=1}^{k} n_i - k\cdot p$	$\frac{R_0^2}{\sum_{i=1} n_i - k\cdot p} = a$	$\frac{b}{a} \sim F_{\alpha,\beta}$
Rest	$R_1^2 - R_0^2$	$\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1) \cdot p$	$\frac{R_1^2 - R_0^2}{\sum_{k+1} n_i + (k-1)\cdot p} = b$	$\alpha = \sum_{k+1} n_i + (k-1)\cdot p$ $\beta = \sum_{1}^{k} n_i - k\cdot p$

Diese Testinterpretation ermöglicht einen weiteren Beweis desselben. Das totale Modell unter Nullhypothese lautet

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \\ Y_{k+1} \\ \vdots \\ Y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1\beta_1 \\ \vdots \\ X_k\beta_k \\ X_{k+1}\beta_{k+1} \\ \vdots \\ X_{k+1}\beta_{k+1} \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} X_1\beta_1 \\ \vdots \\ X_k\beta_1 \\ X_{k+1}\beta_1 \\ \vdots \\ X_{k+1}\beta_1 \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \\ . \\ . \\ X_{k+1} \end{pmatrix} \beta_1 + e \quad ,$$

also

$$Y_{tot} = X_{tot}\beta_{tot} + e \quad ,$$

folglich (1) gilt

$$R_1^2 = (Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})$$

Wir zerlegen

$$Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot} = \begin{pmatrix} Y_1 - X_1\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ Y_k - X_k\hat{\beta}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1\hat{\beta}_1 - X_1\hat{\beta}_{tot} \\ \vdots \\ X_k\hat{\beta}_k - X_k\hat{\beta}_{tot} \\ Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_{tot} \\ \vdots \\ Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_{tot} \end{pmatrix}$$

Wegen

$$(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'X_1 = Y'_1X_1 - \hat{\beta}'_1S_1 = 0$$

stehen die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht. Folglich ist

$$(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{tot} - X_{tot}\hat{\beta}_{tot}) = \sum_{i=1}^{k} (Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)'(Y_1 - X_1\hat{\beta}_1)$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})'S_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=1}^{1} (Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_{tot}) \quad ,$$

also

$$R_1^2 = R_0^2 + \sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot})'S_1(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=1}^{1} (Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_{tot})'(Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_{tot})$$

Oder, wie wir bereits bewiesen haben,

$$R_1^2 = R_0^2 + Y'_{tot}AY_{tot} \quad ,$$

wobei A symmetrisch und idempotent ist, also

$$R_1^2 = R_0^2 + (AY_{tot})'(AY_{tot}) \quad ,$$

d.h. die quadratische Form $Y'_{tot} A Y_{tot}$ ist positiv (semi -) definit.

Ferner wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} R_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} Y'_{tot} A_1 Y_{tot} \sim \chi'^2 \left(\sum_{i=1}^{k+1} n_i - p ; \lambda \right) ,$$

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 = \frac{1}{\sigma^2} Y'_{tot} A_2 Y_{tot} \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

verteilt sind. Folglich (15) sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=1}^{1} (Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_{tot})' (Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_{tot}) \right]$$

$$\sim \chi'^2 \left(\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1) \cdot p ; \lambda \right)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p \right)$$

unabhängig verteilt. Also (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1) \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot})' S_i (\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{tot}) + \sum_{i=1}^{1} (Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_{tot})' (Y_{k+1} - X_{k+1} \hat{\beta}_{tot})}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2}$$

$$\sim F' \left[\sum_{i=k+1}^{k+1} n_i + (k-1)p , \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p ; \lambda \right]$$

verteilt. Es wurde bereits gezeigt, daß $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den notwendigen und hinreichenden Test für unsere Nullhypothese. Seine Form ist mit dem vorangegangenen Test identisch.

315. RAO'S TEST FÜR EIN SYSTEM LINEARER HYPOTHESEN

3151. Herleitung des RAO 'schen Tests .

Wir suchen im Modell

$$Y \sim N_n (X\beta ; \sigma^2 I)$$

einen Test, der die Nullhypothese

$H_0 : H'\beta = \Theta_0$

prüft; in diesem System linearer Hypothesen ist der Vektor Θ_0 fest vorgegeben und sind die Zeilen von H' als linear unabhängig vorausgesetzt. Die linear abhängigen kann man ja sowieso fortlassen, da sie von selbst erfüllt sind, wenn die linear unabhängigen gültig sind. H' habe k Zeilen, die also alle o.B.d.A. linear unabhängig sind. Den Test kann man folgendermaßen finden.

Wir setzen

$$\hat{\Theta} = {}_{def} H'\hat{\beta} \quad .$$

Da (2)

$$\hat{\beta} \sim N_p (\beta; \sigma^2 S^{-1})$$

verteilt ist, ist (11)

$$\hat{\Theta} = H'\hat{\beta} \sim N_k (H'\beta; \sigma^2 \cdot H'S^{-1}H)$$

verteilt; also (17) ist

$$\frac{1}{\sigma^2} (\hat{\Theta} - \Theta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(\hat{\Theta} - \Theta_0) \sim \chi'^2(k; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} (H'\beta - \Theta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(H'\beta - \Theta_0)$$

Hierzu brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $(H'S^{-1}H)^{-1}$ tatsächlich existiert. Und dies sieht man so. Es sind

$$\text{Typ } H'S^{-1}H = (k,k) \qquad \text{und } S^{-1} = R'R$$

mit nicht-singulärer Matrix R, also ist

$$H'S^{-1}H = (R\,H)'.(R\,H)$$

Da R nicht-singulär ist, gilt

$$\text{Rang } H'S^{-1}H = \text{Rang } RH = \text{Rang } H = \text{Rang } H' = k \ ,$$

d.h. $H'S^{-1}H$ ist eine quadratische Matrix mit vollem Rang, also existiert ihre Inverse.

Es wurde bereits gezeigt, daß $\hat{\beta}$ und R_n^2 unabhängig verteilt sind. Somit sind

$$\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0) \sim \chi'^2(k\,;\,\lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^{\,2} \sim \chi^2(n-p)$$

unabhängig verteilt; also (7) ist

$$\frac{n-p}{k} \cdot \frac{(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)}{R_0^{\,2}} \sim F'(k, n-p\,;\,\lambda)$$

verteilt. Nun ist

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(H'\beta - \vartheta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)$$

genau dann gleich 0, wenn

$$H'\beta = \vartheta_0 \;;$$

denn

$$H'S^{-1}H = (R\,H)' \cdot (R\,H)$$

ist eigentlich positiv definit, also (31) gilt dasselbe von ihrer Inversen.

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : H'\beta = \vartheta_0$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{k} \cdot \frac{(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(\hat{\vartheta} - \vartheta_0)}{R_0^{\,2}} \sim F_{k,\,n-p}$$

verteilt ist. Dabei sind

$$\hat{\vartheta} = H'\hat{\beta} \;,$$

die Zeilen von H' linear unabhängig und die Anzahl der Zeilen von H' gleich k .

Interpretation des Tests :

Wir zerlegen

$$Y - X\beta = (Y - X\hat{\beta}) + (X\hat{\beta} - X\beta)$$

$$= (Y - X\hat{\beta}) + X(\hat{\beta} - \beta)$$

Wegen

$$(Y - X\hat{\beta})'X = Y'X - \hat{\beta}'S = 0$$

stehen die beiden Vektoren der rechten Seite aufeinander senkrecht. Folglich ist

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = (Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta)'S(\hat{\beta} - \beta) ,$$

d.h.

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) - R_0^2 = (\hat{\beta} - \beta)'S(\hat{\beta} - \beta)$$

Nun ist

$$R_1^2 = \underset{\substack{\beta \\ H'\beta = \Theta_0}}{\text{Min}} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) ,$$

also

$$R_1^2 - R_0^2 = \underset{\substack{\beta \\ H'\beta = \Theta_0}}{\text{Min}} \left[(Y - X\beta)'(Y - X\beta) - (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) \right]$$

$$= \underset{\substack{\beta \\ H'\beta = \Theta_0}}{\text{Min}} (\hat{\beta} - \beta)'S(\hat{\beta} - \beta)$$

Bezeichnet

$$Z = {}_{\text{def}}\hat{\beta} - \beta ,$$

so durchläuft Z mit ß zugleich den vollen p - dim. euklidischen Raum. Deshalb ist auf die quadratische Form Z'SZ der folgende bekannte Satz anwendbar:

$$\underset{\substack{Z \\ W'Z = \alpha_0}}{\text{Min}} Z'SZ = \alpha'_0 \cdot (W'S^{-1}W)^- \cdot \alpha_0 \quad , \quad S : \text{positiv definit}$$

wobei $(W'S^{-1}W)^-$ irgendeine g - Inverse von $W'S^{-1}W$ bezeichnet.

Es sind

$$H'\beta = \Theta_0 \qquad \text{und} \qquad H'\hat{\beta} - H'\beta = H'\hat{\beta} - \Theta_0$$

äquivalente Bedingungen, d.h.

$$H'Z = H'\hat{\beta} - \Theta_0 \qquad \text{und} \qquad H'\beta = \Theta_0$$

sind äquivalente Bedingungen, also ist

$$R_1^2 - R_0^2 = \underset{\substack{Z \\ H'Z = H'\hat{\beta} - \Theta_0}}{\text{Min}} Z'SZ = (H'\hat{\beta} - \Theta_0)'(H'S^{-1}H)^{-1}(H'\hat{\beta} - \Theta_0) ,$$

da die g - Inverse stets gleich der Inversen ist, falls letztere existiert :

$$(H'S^{-1}H)^- = (H'S^{-1}H)^{-1}$$

Deshalb läßt sich der Test auch so schreiben

$$\frac{n-p}{k} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k,n-p}$$

3152. Herleitung der bisherigen Tests als Spezialfälle des RAO ' schen Tests.

Modell : $Y = X\beta + e$

$H_0 : \beta = \beta_0$

Wir schreiben die Nullhypothese komponentenweise

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_{10} \\ &\vdots \\ \beta_p &= \beta_{p0} \quad , \end{aligned}$$

also

$$I \cdot \beta = \beta_0 \quad ,$$

also

$$H' = I \qquad \text{und} \qquad k = \text{Rang } H' = \text{Rang } I = P ,$$

also

$$(H'S^{-1}H)^{-1} = (S^{-1})^{-1} = S$$

Das liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \beta = \beta_0$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta}-\beta_0)'S(\hat{\beta}-\beta_0)}{R_0^2} \sim F_{p,n-p}$$

verteilt ist.

Modell : $Y = X\beta + e = Z\gamma + W\delta + e$

$H_0 : \gamma = \gamma_0$, wobei δ außer acht bleibt.

Die Nullhypothese kann auch so geschrieben werden

$$(I , 0)\,\beta = \gamma_0 ,$$

also sind

$$H' = (I , 0) \qquad \text{und } \Theta_0 = \gamma_0 ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = q$$

Somit (27) ist das lineare Gleichungssystem $H'\beta = \Theta_0$ lösbar.

Bezeichnet

$$\begin{vmatrix} V & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix} = \det S^{-1} ,$$

so gilt

$$H'S^{-1}H = (I , 0)\begin{pmatrix} V & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (V, \cdot\cdot)\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= V ,$$

also

$$(H'S^{-1}H)^{-1} = V^{-1}$$

Früher wurde gezeigt, daß

$$V^{-1} = Z'[\, I - W(W'W)^{-1}W' \,]Z$$

ist. Somit lautet der gesuchte Test folgendermaßen.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \gamma = \gamma_0$, wobei δ außer acht bleibt,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma}-\gamma_0)'Z'[\,I - W(W'W)^{-1}W'\,]Z(\hat{\gamma}-\gamma_0)}{R_0^{\,2}} \sim F_{q,\,n-p}$$

verteilt ist.

Modell : $Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1$

$\vdots$

$Y_k = X_k \beta_k + e_k$

H_0: $\beta_1 = \beta^*$

$\beta_k = \beta^*$

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & X_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} + e$$

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ & \ddots \\ 0 & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^* \\ \vdots \\ \beta^* \end{vmatrix}$$

Folglich sind

$$H' = \begin{vmatrix} I & 0 \\ & \ddots \\ 0 & I \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Theta_0 = \begin{vmatrix} \beta^* \\ \vdots \\ \beta^* \end{vmatrix},$$

also $\tilde{k} = \text{Rang } H' = k \cdot p$

Somit (27) ist das lineare Gleichungssystem $H'\beta = \Theta_0$ lösbar.

Es ist

$$H'S^{-1}H = \begin{vmatrix} I & 0 \\ & \ddots \\ 0 & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & S_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & 0 \\ & \ddots \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & S_k^{-1} \end{vmatrix},$$

also

$$(H'S^{-1}H)^{-1} = \begin{vmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{vmatrix}$$

und

$$H'\hat{\beta} - \Theta_0 = \begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta^* \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k - \beta^* \end{vmatrix}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \begin{matrix} \beta_1 = \beta^* \\ \vdots \\ \beta_k = \beta^* \end{matrix}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\beta}_i - \beta^*)' S_i (\hat{\beta}_i - \beta^*)}{\sum_{i=1}^{k} R_0^2{}_i} \sim F_{k \cdot p, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

$$\text{Modell : } \begin{matrix} Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1 = Z_1 \gamma_1 + W_1 \delta_1 + e_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y_k = X_k \beta_k + e_k = Z_k \gamma_k + W_k \delta_k + e_k \end{matrix}$$

$$H_0 : \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma^* \\ \vdots \\ \gamma_k = \gamma^* \end{matrix}$$

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} + e$$

$$\begin{pmatrix} (1,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \vdots \\ \gamma^* \end{pmatrix}$$

Folglich sind

$$H' = \begin{pmatrix} (1,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta_0 = \begin{pmatrix} \gamma^* \\ \vdots \\ \gamma^* \end{pmatrix},$$

also

$$\tilde{k} = \text{Rang } H' = k \cdot q$$

Somit (27) ist das lineare Gleichungssystem $H'\beta = \Theta_0$ lösbar.

Es ist

$$H'S^{-1}H = \begin{pmatrix} (1,0)S_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0)S_k^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{pmatrix},$$

falls man die folgende Bezeichnung einführt

$$\begin{pmatrix} V_1, \cdot\cdot \\ \cdot\cdot, \cdot\cdot \end{pmatrix} = \text{Def } S_1^{-1},$$

also

$$(H'S^{-1}H)^{-1} = \begin{pmatrix} V_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H'\hat{\beta} - \Theta_0 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 - \gamma^* \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_k - \gamma^* \end{pmatrix}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma^* \\ \vdots \\ \gamma_k = \gamma^* \end{matrix}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{k \cdot q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)' Z'_i [I - W_i (W'_i W_i)^{-1} W'_i] Z_i (\hat{\gamma}_i - \gamma^*)}{\sum_{i=1}^{k} R_0^2{}_i}$$

$$\sim F_{k \cdot q, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

Modell: $Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1$

$Y_2 = X_2 \beta_2 + e_2$

H_0: $\beta_1 = \beta_2$

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & , 0 \\ 0 & , X_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} + e$$

$$(I, -I) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Folglich sind

$$H' = (I, -I) \qquad \text{und} \qquad \Theta_0 = 0 ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = p$$

Homogene lineare Gleichungssysteme sind immer lösbar. Es ist

$$H'S^{-1}H = (I, -I) \begin{pmatrix} S_1^{-1} & , 0 \\ 0 & , S_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}$$

$$= (S_1^{-1}, -S_2^{-1}) \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}$$

$$= S_1^{-1} + S_2^{-1} ,$$

also

$$(H'S^{-1}H)^{-1} = (S_1^{-1} + S_2^{-1})^{-1}$$

und

$$H'\hat{\beta} - \Theta_0 = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0: \beta_1 = \beta_2$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1+n_2-2p}{p} \cdot \frac{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)'(S_1^{-1}+S_2^{-1})^{-1}(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)}{R_0^2{}_1 + R_0^2{}_2} \sim F_{p,\,n_1+n_2-2p}$$

verteilt ist.

Modell: $Y_1 = X_1\beta_1 + e_1 = Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 + e_1$

$Y_2 = X_2\beta_2 + e_2 = Z_2\gamma_2 + W_2\delta_2 + e_2$

$H_0: \gamma_1 = \gamma_2$, wobei δ_1 und δ_2 außer acht bleiben.

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + e$$

$$(1, 0, -1, 0) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Folglich sind

$H' = (1, 0, -1, 0)$ und $c_0 = 0$,

also

$k = \text{Rang } H' = q$.

Homogene lineare Gleichungssysteme $H'\beta = 0$ sind immer lösbar. Es ist

$$H'S^{-1}H = (1,0,-1,0) \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[(1,0)S_1^{-1}, -(1,0)S_2^{-1} \right] \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= (1,0)S_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1,0)S_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= V_1 + V_2 \quad ,$$

wobei die Bezeichnungen

$$\begin{pmatrix} V_1, \cdot\cdot \\ \cdot\cdot, \cdot\cdot \end{pmatrix} = {}_{Def} S_1^{-1}$$

eingeführt wurden. Also gelten

$(H'S^{-1}H)^{-1} = (V_1 + V_2)^{-1}$ und $H'\hat{\beta} - \Theta_0 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\gamma_1 = \gamma_2$, wobei δ_1 und δ_2 außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1+n_2-2p}{q} \cdot \frac{(\hat{\gamma}_1-\hat{\gamma}_2)'(V_1+V_2)^{-1}(\hat{\gamma}_1-\hat{\gamma}_2)}{R_0{}^2{}_1 + R_0{}^2{}_2} \sim F_{q,\, n_1+n_2-2p}$$

verteilt ist.

Modell: $Y_1 = X_1\beta_1 + e_1$

$\vdots$

$Y_k = X_k\beta_k + e_k$

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} + e$$

$$\begin{vmatrix} 1, -1, 0, \ldots, 0 \\ \vdots \quad\quad \ddots \\ 1, 0, 0, \ldots, -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} = 0 \,, \quad \text{d.h.} \quad \begin{matrix} \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 - \beta_k = 0 \end{matrix}$$

Folglich sind

$$H' = \begin{vmatrix} 1, -1, 0, \ldots 0 \\ \vdots \quad\quad \ddots \\ 1, 0, 0, \ldots, -1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta_0 = 0 \quad ,$$

also

$$\tilde{k} = \text{Rang } H' = (k-1) \cdot p$$

Homogene lineare Gleichungssysteme $H'\beta = 0$ sind immer lösbar. Es ist

$$H'S^{-1}H = \begin{vmatrix} 1, -1, & 0 \\ & \ddots & \\ 1, 0 & & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, \dots, 1 \\ -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & , -1 \end{vmatrix} .$$

$$= \begin{vmatrix} S_1^{-1}, -S_2^{-1}, 0, \dots, 0 \\ \vdots \quad 0 \quad \ddots \quad 0 \vdots \\ S_1^{-1}, 0, \quad 0, \dots, -S_k^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, \dots, 1 \\ -1, \dots, 0 \\ 0, \dots, -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} S_1^{-1} + S_2^{-1} & S_1^{-1}, \dots, S_1^{-1} \\ S_1^{-1}, & S_1^{-1} + S_2^{-1}, \dots, S_1^{-1} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ S_1^{-1}, & S_1^{-1}, \dots, S_1^{-1} + S_k^{-1} \end{vmatrix} = {}_{\text{Def}} A$$

und

$$H'\hat{\beta} - e_0 = \begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \end{vmatrix}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot p} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \end{vmatrix}' A^{-1} \begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^{k} R_0^2{}_i} \sim F_{(k-1)\cdot p,\ \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

Modell:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1\beta_1 + e_1 = Z_1\gamma_1 + W_1\delta_1 + e_1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y_k &= X_k\beta_k + e_k = Z_k\gamma_k + W_k\delta_k + e_k \end{aligned}$$

H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k$,

wobei $\delta_1, \ldots, \delta_k$ außer acht bleiben.

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} + e$$

$$\begin{vmatrix} (1,0), & -(1,0), & & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots \\ (1,0), & & & -(1,0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} = 0 \text{ , d.h. } \begin{matrix} \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \vdots \\ \gamma_1 - \gamma_k = 0 \end{matrix}$$

Folglich sind

$$H' = \begin{vmatrix} (1,0) & , -(1,0) & \\ \vdots & & 0 \\ (1,0) & , & -(1,0) \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Theta_0 = 0 \quad ,$$

also

$$\tilde{k} = \text{Rang } H' = (k-1) \cdot q$$

Homogene lineare Gleichungssysteme sind immer lösbar: $H'\beta = 0$.

Es ist

$$H'S^{-1}H = \begin{vmatrix} 1 & , -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & , & & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \binom{1}{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ -1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & , -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & , -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} V_1 + V_2, & V_1, & \ldots, & V_1 \\ V_1, & V_1 + V_2, & \ldots, & V_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ V_1, & V_1, & \ldots, & V_1 + V_k \end{vmatrix} = {}_{\text{Def}} A$$

und

$$H'\hat{\beta} - \Theta_0 = \begin{matrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_k \end{matrix}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k$, wobei δ_1 , ... , δ_k außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{(k-1) \cdot q} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_k \end{vmatrix}' A^{-1} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_k \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^{k} R_{0i}^2} \sim F_{(k-1)\cdot q,\, \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}$$

verteilt ist.

Modell: $Y_1 = X_1 \beta_1 + e_1$, $n_1 \geq p$

$Y_2 = X_2 \beta_2 + e_2$, $n_2 < p$ (!)

H_0: $X_2 \beta_2 = X_2 \beta_1$

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 , 0 \\ 0 , X_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} + e$$

$$X_2 (I , -I) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Folglich sind

$H' = X_2 (I , -I)$ und $\Theta_0 = 0$,

also

$k = \text{Rang } H' = n_2$

Homogene lineare Gleichungssysteme $H'\beta = 0$ sind immer lösbar. Da aber X_2 wegen $n_2 < p$ keinen vollen Rang besitzt, hat auch

$$\text{Rang} \begin{vmatrix} X_1 , 0 \\ 0 , X_2 \end{vmatrix} = r$$

keinen vollen Rang, so daß S^{-1} nicht existiert. Bezeichnet S^- irgendeine g- Inverse von S, so existiert stets

$$(H'S^{-}H)^{-1} \quad ,$$

und liegt H im Spaltenraum X' , so lautet der gesuchte notwendige und hinreichende Test für die Nullhypothese H_0: $H'\beta = \Theta_0$ folgendermaßen

$$\frac{n-r}{k} \cdot \frac{(\hat{\Theta} - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta} - \Theta_0)}{R_0^2} \sim F_{k,n-r}$$

Zum Beweise zeigen wir zunächst, daß

$$\hat{\Theta} = H'\hat{\beta} \sim N_k[\, H'\beta ; \sigma^2 \cdot H'S^{-}H \,]$$

verteilt ist. Nach Voraussetzung liegt

$$H \in \text{Spaltenraum } X'$$

Da (28)

$$\text{Spaltenraum } X' = \text{Spaltenraum } X' \cdot X \, ,$$

liegt

$$H \in \text{Spaltenraum } X' \cdot X$$

Deshalb existiert eine Matrix A mit der Eigenschaft

$$H = X'X \cdot A \, ,$$

also

$$H'\hat{\beta} = A' \cdot X'X \cdot \hat{\beta}$$

Für alle Schätzungen $\hat{\beta}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate gelten die Normalgleichungen

$$X'X \cdot \hat{\beta} = X'Y \, ,$$

also

$$H'\hat{\beta} = A'X'Y$$

Deshalb gelten (4)

$$\begin{aligned} \text{Dis } H'\hat{\beta} &= A'X' \cdot \sigma^2 I \cdot XA \\ &= \sigma^2 A'SA \\ &= \sigma^2 A'SS^{-}SA \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 H'S^{-}H$$

und

$$E(H'\hat{\beta}) = E(A'X'Y) = A'X'E(Y) = A'X'X\beta = H'\beta ;$$

denn der Erwartungswert ist ein linearer Operator. Ferner (11) gilt

$$H'\hat{\beta} = A'X'Y \sim N_k(A'X'X\beta ; A'X' \cdot \sigma^2 I \cdot XA) \sim N_k(H'\beta ; \sigma^2 \cdot H'S^{-}H)$$

Weiter zeigen wir, daß

$$(H'S^{-}H)^{-1}$$

stets existiert und für alle g- Inversen von S immer dieselbe Matrix ist. Nach Voraussetzung liegt

$$H \in \text{im Spaltenraum } X' ,$$

also (28)

$$H = S \cdot A$$

Folglich ist

$$H'S^{-}H = A'SS^{-}SA$$
$$= A'SA$$

für alle g- Inversen S^{-} von S stets dieselbe Matrix.

Es ist $\quad \text{Typ } A'SA = (k,k)$

und

$$\text{Rang } A'SA = \text{Rang } (XA)'(XA)$$
$$= \text{Rang } XA$$
$$\geqslant \text{Rang } A'S\,X' \cdot XA = \text{Rang } A'S^2A$$

d.h.

$$\text{Rang } A'S\,A > \text{Rang } A'S^2A$$

Andererseits ist

$$\text{Rang } A'S^2A = \text{Rang } (S\,A)'(SA)$$
$$= \text{Rang } (S\,A)$$
$$\geq \text{Rang } A'S\,A \quad ,$$

d.h.

$$\text{Rang } A'S^2A \geqslant \text{Rang } A'SA$$

und somit

$$\begin{aligned}\text{Rang } A'SA &= \text{Rang } A'S^2A \\ &= \text{Rang } (SA)'(SA) \\ &= \text{Rang } H'H \\ &= \text{Rang } H' \\ &= k\end{aligned}$$

Folglich ist $A'SA$ eine quadratische Matrix mit vollem Rang, weshalb

$$(A'SA)^{-1} \quad , \text{ d.h. } \quad (H'S^{-}H)^{-1}$$

existiert; überdies ist sie für alle g-Inversen S^{-} von S stets dieselbe Matrix.

Da

$$\hat{\Theta} = H'\hat{\beta} \sim N_k\,(H'\beta;\ \sigma^2 H'S^{-}H)$$

verteilt ist, ist (17)

$$\frac{1}{\sigma^2}\,(\hat{\Theta} - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta} - \Theta_0) \sim \chi'^2(k\,;\,\lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\,(H'\beta - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(H'\beta - \Theta_0)$$

Also (7) ist

$$\frac{n-r}{k} \cdot \frac{(\hat{\Theta} - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta} - \Theta_0)}{R_0^{\,2}} \sim F'(k, n-r\,;\,\lambda)$$

verteilt; denn

$$\hat{\Theta} = A'\begin{pmatrix} X_1', 0 \\ 0\ ,\ X_2 \end{pmatrix} Y \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sigma^2} R_0^{\,2} = Y'\left[\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X_1', 0 \\ 0\ ,\ 0 \end{pmatrix}\right] Y$$

sind (13) wegen

$$\begin{pmatrix} X'_1\ ,\ 0 \\ 0\ ,\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - X_1 S_1^{-1} X'_1\ ,\ 0 \\ 0\ ,\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

unabhängig verteilt, also sind auch

$$\frac{1}{\sigma^2} R_0^{\,2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sigma^2}(\hat{\Theta} - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta} - \Theta_0)$$

unabhängig verteilt.

Wann ist $\lambda = 0$? Es ist

$$H'S^{-}H = (XA)'(XA)$$

also ist $H'S^{-}H$ eigentlich positiv definit, somit gilt dasselbe auch von $(H'S^{-}H)^{-1}$. Deshalb ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn die Nullhypothese

$H_0 : H'\beta = \Theta_0$ gültig ist. Dies liefert den gesuchten

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : H'\beta = \Theta_0$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-r}{k} \cdot \frac{(\hat{\Theta} - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta} - \Theta_0)}{R_0^2} \sim F_{k,n-r}$$

verteilt ist, falls

$$H \in \text{Spaltenraum } X'$$

liegt und r = Rang X bezeichnet .

Interpretation des Tests :

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$R_1^2 - R_0^2 = \underset{\substack{\beta \\ H'\beta = \Theta_0}}{\text{Min}} (\hat{\beta} - \beta)'S(\hat{\beta} - \beta)$$

$$R_1^2 - R_0^2 = \underset{\varphi}{\text{Min}} \; \varphi' S \varphi$$

$$H'\varphi = \hat{\Theta} - \Theta_0 \quad ,$$

wobei φ mit β zugleich den vollen p-dim euklidischen Raum durchläuft.

Bezeichnen

$$D = {}_{Def} H'S^{-}H \qquad \text{und} \qquad \varphi^* = {}_{Def} AD^{-1} \cdot (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \quad ,$$

so erfüllt auch φ^* die Nebenbedingung

$$H'\varphi^* = \hat{\Theta}_0 - \Theta_0 \; ;$$

denn

$$\begin{aligned} H'\varphi^* &= H'AD^{-1}(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= A'SAD^{-1}(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= D \cdot D^{-1} \cdot (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= \hat{\Theta}_0 - \Theta_0 \end{aligned}$$

Die quadratische Form nimmt an der Stelle φ^* den Wert

$$\begin{aligned} \varphi^{*\prime} S \varphi^* &= (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)'(D^{-1})'A'SAD^{-1}(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)'(D^{-1})'D \cdot D^{-1} \cdot (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)'(D^{-1})'(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \end{aligned}$$

an. Nun ist

$$D = I + X_2 S_1^{-1} X_2'$$

eine symmetrische Matrix, also gilt

$$(D^{-1})' = D^{-1}$$

und somit

$$\mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*} = (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)' D^{-1} (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)$$

Wir zeigen nun, daß unter der Nebenbedingung

$$H' = \hat{\Theta} - \Theta_0$$

die quadratische Form $\mathfrak{x}' S \mathfrak{x}$ keinen kleineren Wert annehmen kann. Bezeichnen

$$\mathfrak{z}_1 = {}_{Def} X \mathfrak{x} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{z}_2 = {}_{Def} X \mathfrak{x}^{*}$$

und wendet man auf $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ die Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung an

$$(\mathfrak{z}_1' \cdot \mathfrak{z}_2)^2 < (\mathfrak{z}_1' \cdot \mathfrak{z}_1) \cdot (\mathfrak{z}_2' \cdot \mathfrak{z}_2) ,$$

so ergibt sich

$$(\mathfrak{x}' S \mathfrak{x}^{*})^2 < (\mathfrak{x}' S \mathfrak{x}) \cdot (\mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*})$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}' S \mathfrak{x}^{*} &= \mathfrak{x}' S A D^{-1} (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= (H' \mathfrak{x})' D^{-1} (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)' \cdot D^{-1} \cdot (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0) \\ &= \mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*} \end{aligned} .$$

Sei erstens

$$\mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*} \neq 0 ,$$

dann folgt aus der Cauchy - Schwarz'schen Ungleichung

$$\mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*} < \mathfrak{x}' S \mathfrak{x}$$

In diesem Falle ist also

$$\operatorname{Min} \mathfrak{x}' S \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*}$$

$$H' \mathfrak{x} = \hat{\Theta}_0 - \epsilon_0$$

Sei zweitens

$$\mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*} = 0 ,$$

dann ist trivialerweise

$$\operatorname{Min} \mathfrak{x}' S \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{*\prime} S \mathfrak{x}^{*} ;$$

$$H' \mathfrak{x} = \hat{\Theta}_0 - \Theta_0$$

denn S ist eine positiv semi - definite Matrix. Somit ist

$$\text{Min } \mathfrak{x}'S\mathfrak{x} = (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)$$

$$H'\mathfrak{x} = \hat{\Theta}_0 - \Theta_0$$

und das Minimum wird an der Stelle

$$\mathfrak{x}^* = AD^{-1}(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)$$

angenommen. Insgesamt ergibt sich

$$R_1^2 - R_0^2 = (\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)'(H'S^{-}H)^{-1}(\hat{\Theta}_0 - \Theta_0)$$

Deshalb kann man den Test auch so schreiben

$$\frac{n-r}{k} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{k,\,n-r}$$

In unserem Fall sind die Voraussetzungen zu diesem Test erfüllt. Denn es liegt

$$H \in \text{Spaltenraum } X' ,$$

da

$$H' = \begin{pmatrix} X'_2 \\ -X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_1 & 0 \\ 0 & X'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 S_1^{-1} X'_1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= X' \cdot B$$

Da

$$(H'S^{-}H)^{-1}$$

für alle g-Inversen S^{-} von S stets denselben Wert hat, genügt es, eine möglichst einfache g-Inverse zu wählen. S^{-} ist irgendeine Matrix, die die Gleichung

$$S \cdot S^{-} \cdot S = S$$

erfüllt, d.h.

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} ,$$

also

$$\begin{pmatrix} S_1 B_{11} S_1 & S_1 B_{12} S_2 \\ S_2 B_{21} S_1 & S_2 B_{22} S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$S^{-} = \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-} \end{pmatrix}$$

eine spezielle g-Inverse von S. Für sie gilt

$$H'S^{-}H = X_2 (I\ ,\ -I) \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} X'_2$$

$$= X_2 (S_1^{-1}\ ,\ -S_2^{-}) \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} X'_2$$

$$= X_2 (S_1^{-1} + S_2^{-}) X'_2$$

$$= X_2 S_1^{-1} X'_2 + X_2 S_2^{-} X'_2$$

Es ist

$$S_2 \cdot S_2^{-} \cdot S_2 = S_2 \quad ,$$

also

$$X'_2 X_2 \cdot S_2^{-} \cdot X_2' X_2 = X'_2 X_2 \ ,$$

also

$$(X_2 X_2') \cdot X_2 S_2^{-} X'_2 \cdot (X_2 X_2') = (X_2 X_2')\,(X_2 X_2')$$

Da

$$\text{Typ } X_2 X_2' = (n_2\ ,\ n_2)$$

und

$$\text{Rang } X_2 X_2' = \text{Rang } X_2 = n_2 \ ,$$

existiert $(X_2 X_2')^{-1}$, somit ist

$$X_2 S_2^{-} X'_2 = I \quad ;$$

also

$$H'S^{-}H = I + X_2 S_1^{-1} X'_2$$

Deshalb lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : X_2 \beta_2 = X_2 \beta_1$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1 - p}{n_2} \cdot \frac{(Y_2 - X_2 \hat{\beta}_1)'(I + X_2 S_1^{-1} X'_2)^{-1}(Y_2 - X_2 \hat{\beta}_1)}{R_0^2{}_1} \sim F_{n_2, n_1 - p}$$

verteilt ist ; denn $n - r = (n_1 + n_2) - (p + n_2) = n_1 - p$ und $X_2 \hat{\beta}_2 = Y_2$

Modell : $$\begin{aligned} Y_1 &= X_1\beta_1 + e_1 && , n_1 \geqslant p \\ &\vdots && \vdots \\ Y_k &= X_k\beta_k + e_k && , n_k \geqslant p \\ Y_{k+1} &= X_{k+1}\beta_{k+1} + e_{k+1} && , n_{k+1} < p \ (!) \\ &\vdots && \vdots \\ Y_{k+1} &= X_{k+1}\beta_{k+1} + e_{k+1} && , n_{k+1} < p \ (!) \end{aligned}$$

$$H_0 : \quad \begin{aligned} \beta_1 &= \beta_2 = \ldots = \beta_k \\ X_{k+1}\beta_{k+1} &= X_{k+1}\beta_1 \\ &\vdots \\ X_{k+1}\beta_{k+1} &= X_{k+1}\beta_1 \end{aligned}$$

In diesem Fall lassen sich das Modell und die Nullhypothese folgendermaßen schreiben

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{k+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} + e$$

$$\begin{aligned} &\beta_2 - \beta_1 = 0 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ &\beta_k - \beta_1 = 0 \\ &X_{k+1}(\beta_{k+1} - \beta_1) = 0 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ &X_{k+1}(\beta_{k+1} - \beta_1) = 0 \end{aligned} \quad , \text{ d.h. } \quad \begin{pmatrix} -I & I & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -I & 0 & \cdots & I & 0 \\ & & & X_{k+1} & \\ -X_{k+1} & 0 & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \\ -X_{k+1} & 0 & & & X_{k+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = 0$$

Folglich sind

$$H' = \begin{pmatrix} -I & I & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ -I & 0 & \cdots & I & \\ -X_{k+1} & 0 & & X_{k+1} & \\ \vdots & & & & \ddots \\ -X_{k+1} & 0 & & & X_{k+1} \end{pmatrix} \qquad \text{und } \Theta_0 = 0 \ ,$$

also

$$\tilde{k} = \operatorname{Rang} H' = (k-1) \cdot p + \sum_{i=1}^{i} n_{k+1}$$

Es ist

$$r = \text{Rang } X = \text{Rang} \begin{vmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{k+1} \end{vmatrix} = k \cdot p + \sum_{i=1}^{1} n_{k+i} \quad ,$$

also

$$n - r = \sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p$$

und

$$H'\hat{\beta} - \Theta_0 = \begin{vmatrix} \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_1 \\ X_{k+1}\hat{\beta}_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ X_{k+1}\hat{\beta}_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k - \hat{\beta}_1 \\ Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ Y_{k+1} - X_{k+1}\hat{\beta}_1 \end{vmatrix} ,$$

da

$$X_{k+1}\hat{\beta}_{k+1} = Y_{k+1}$$

Das letztere sieht man so. Wegen der Existenz von $(X_{k+1}X'_{k+1})^{-1}$ gilt

$$X_{k+1}\hat{\beta}_{k+1} = (X_{k+1} \cdot X'_{k+1})^{-1} X_{k+1} \cdot X'_{k+1} X_{k+1}\hat{\beta}_{k+1} = (X_{k+1} \cdot X'_{k+1})^{-1} X_{k+1}X'_{k+1}Y_{k+1}$$

$$= Y_{k+1}$$

Wir müssen noch zeigen, daß

$$H \in \text{Spaltenraum } X'$$

liegt, müssen also die Existenz einer Matrix B mit der Eigenschaft

$$\begin{vmatrix} -1, \ldots, -1, & -X'_{k+1}, \ldots, & -X'_{k+1} \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & 0 \\ & & X'_{k+1} \\ 0 & & \ddots \\ & & X'_{k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X'_{k+1} \end{vmatrix} \cdot B$$

nachweisen. Die folgende Matrix leistet das Gewünschte

$$B = \begin{pmatrix} -X_1S_1^{-1}, \ldots, -X_1S_1^{-1}, & -X_1S_1^{-1}X'_{k+1}, \ldots, -X_1S_1^{-1}X'_{k+1} \\ X_2S_2^{-1} & \\ \ddots & 0 \\ & X_kS_k^{-1}, \\ & I \\ & \ddots \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Eine spezielle g-Inverse S^- von S ist

$$S^- = \begin{pmatrix} S_1^{-1} & & \\ & \ddots & 0 \\ & S_k^{-1} & \\ & & S^-_{k+1} \\ 0 & & \ddots \\ & & S^-_{k+1} \end{pmatrix}$$

Für sie gilt

$$H'S^-H = \begin{pmatrix} -S_1^{-1} & , & S_2^{-1} & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ -S_1^{-1} & , & & S_k^{-1} & \\ -X_{k+1}S_1^{-1} & , & & & X_{k+1}S^-_{k+1} \\ \vdots & & & & \ddots \\ -X_{k+1}S_1^{-1} & , & 0 & & X_{k+1}S^-_{k+1} \end{pmatrix} \cdot H$$

$$= \begin{pmatrix} (S_1^{-1} + S_2^{-1}) \ldots S_1^{-1} & , & S_1^{-1}X'_{k+1} \ldots S_1^{-1}X'_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^{-1} \ldots (S_1^{-1} + S_k^{-1}), & & S_1^{-1}X'_{k+1} \ldots S_1^{-1}X'_{k+1} \\ X_{k+1}S_1^{-1} \ldots X_{k+1}S_1^{-1} & , & (I + X_{k+1}S_1^{-1}X'_{k+1}), \ldots, X_{k+1}S_1^{-1}X'_{k+1} \\ X_{k+1}S_1^{-1} \ldots X_{k+1}S_1^{-1} & , & X_{k+1}S_1^{-1}X'_{k+1}, \ldots, (I + X_{k+1}S_1^{-1}X'_{k+1}) \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{def}}{} A$$

Ferner gilt

$$R_0^2 = \sum_{i=1}^{k+1} (Y_i - X_i \hat{\beta}_i)'(Y_i - X_i \hat{\beta}_i) = \sum_{i=1}^{k} (Y_i - X_i \hat{\beta}_i)'(Y_i - X_i \hat{\beta}_i)$$

Beim vorigen Test wurde ja

$$X_{k+1} S^{-}_{k+1} X'_{k+1} = I$$

bewiesen; deshalb kann der Test so geschrieben werden.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

$$X_{k+1} \beta_{k+1} = X_{k+1} \beta_1$$
$$\vdots$$
$$X_{k+1} \beta_{k+1} = X_{k+1} \beta_1$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p}{\sum_{i=1}^{k+1} n + (k-1) \cdot p} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \\ X_{k+1} \hat{\beta}_1 - Y_{k+1} \\ \vdots \\ X_{k+1} \hat{\beta}_1 - Y_{k+1} \end{vmatrix} \cdot A^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_k \\ X_{k+1} \hat{\beta}_1 - Y_{k+1} \\ \vdots \\ X_{k+1} \hat{\beta}_1 - Y_{k+1} \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^{k} R_0^2{}_i}$$

$$\sim F^{\sum_{i=1}^{k+1} n}_{\sum_{i=1}^{k} n_i - k \cdot p} + (k-1)p,$$

verteilt ist.

32. NUMERISCHE BEHANDLUNG DER WICHTIGSTEN TESTS FÜR DIE SPEZIELLEN MODELLE

$$y_i = \alpha + \gamma_1 x_{1i} + \ldots + \gamma_{p-1} x_{p-1,i} + e_i$$

mit $\mathrm{Dis}\, Y = \sigma^2 I$ und unabhängigen Y_1, Y_2.

Wir benutzen die Tests stets in der Form

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \cdot \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{\varkappa_2, \varkappa_1}$$

321. 1 Regressionsmodell

$$Y = \left| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} , X \right| \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{pmatrix} + e$$

3211. Prüfung einer angenommenen Regressionshyperebene.

$$H_0 : \alpha = \alpha_0$$

$$\begin{matrix} \gamma_1 = \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} = \gamma_{p-1,0} \end{matrix} \quad , \text{ wobei } \alpha_0, \gamma_{10}, \ldots, \gamma_{p-1,0} \text{ fest vorgegeben sind}$$

Die Nullhypothese läßt sich auch so schreiben

$$H'\beta = \Theta_0 ,$$

wobei

$$H' = I , \Theta_0' = (\alpha_0, \gamma_{10}, \ldots, \gamma_{p-1,0}) ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = p$$

Es ist

$$R_1^2 = \min_{\substack{\beta \\ H'\beta = \Theta_0}} \left[Y - \left| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} , X \right| \cdot \beta \right] \cdot \left[Y - \left| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} , X \right| \cdot \beta \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_0 - \gamma_{10} x_{1i} - \ldots - \gamma_{p-1,0} x_{p-1,i})^2$$

und

$$R_0^2 = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\hat{\alpha}, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}) \begin{vmatrix} 1, \ldots, 1 \\ x_{11}, \ldots, x_{1n} \\ \vdots \\ x_{p-1,1} \ldots, x_{p-1,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\hat{\alpha}, \hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}) \begin{vmatrix} n \cdot \bar{y} \\ \sum_i x_{1i} y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_{p-1,i} y_i \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}\hat{\alpha} - \hat{\gamma}_1 \sum_i x_{1i} y_i - \ldots - \hat{\gamma}_{p-1} \sum_i x_{p-1,i} y_i$$

Wegen

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\gamma}_1 \bar{x}_1 . - \ldots - \hat{\gamma}_{p-1} \bar{x}_{p-1,.}$$

ist

$$R_0^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 - \hat{\gamma}_1 (\Sigma x_{1i} y_i - n\bar{x}_1 . \bar{y}) - \ldots - \hat{\gamma}_{p-1} (\Sigma x_{p-1,i} y_i - n\bar{x}_{p-1,.} \bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_k .) \cdot (y_i - \bar{y})$$

Mit den nachstehenden Dauerbezeichnungen

$$S_{00} = {}_{Def} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_{k0} = {}_{Def} \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_k .) (y_i - \bar{y})$$

$$S_{kk} = {}_{Def} \sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_k .)^2$$

gilt

$$R_0^2 = S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 \\ \gamma_1 = \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} = \gamma_{p-1,0} \end{array}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_0 - \gamma_{10} x_{11} - \ldots - \gamma_{p-1,0} x_{p-1,1})^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0} - S_{00}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k \cdot S_{k0}} \sim F_{p,n-p}$$

verteilt ist.

3212. $H_0 : \alpha = \alpha_0$, wobei α_0 fest vorgegeben ist und die restlichen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$(1,0, \ldots, 0)\, \beta = \alpha_0$$

Folglich ist

$$H' = (1,0, \ldots, 0),$$

also

$$k = \text{Rang } H' = 1$$

Es ist

$$R_1^2 = \operatorname*{Min}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}} \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - \alpha_0) - \gamma_1 x_{11} - \ldots - \gamma_{p-1} x_{p-1,1} \right]^2$$

Beim reduzierten Modell

$$\begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 \end{vmatrix} = X \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} + e$$

sollen die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate mit $\hat{\gamma}_1^*, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}^*$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$R_1^2 = \begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 \end{vmatrix} - (\hat{\gamma}_1^*, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}^*)\, X' \cdot \begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_0)^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n} x_{ki}(y_i - \alpha_0)$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese $H_0: \alpha = \alpha_0$, wobei $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben, gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$(n-p) \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha_0)^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n} x_{ki}(y_i - \alpha_0) - S_{00} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}}{S_{00} - \sum_{k=0}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}} \sim F_{1,n-p}$$

verteilt ist.

3213. H_0: $\gamma_1 = \gamma_{10}, \ldots, \gamma_q = \gamma_{q0}$ wobei α und $\gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$\begin{vmatrix} 0,1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0, & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \beta = \begin{vmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{q0} \end{vmatrix},$$

also

$$k = \text{Rang } H' = q$$

Es ist

$$R_1^2 = \underset{\alpha, \gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_{p-1}}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \gamma_{10} x_{1i} - \ldots - \gamma_{p-1,0} x_{p-1,i}) - \alpha - \gamma_{q+1} x_{q+1,i} - \ldots - \gamma_{p-1} x_{p-1,i}]^2$$

Beim reduzierten Modell

$$Y_1 - X_1 \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{q0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}, X_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} + e$$

sollen die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate mit $\hat{\alpha}^*, \hat{\gamma}_{q+1}^*, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}^*$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$R_1^2 = S_{00}^* - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* S_{k0}^*$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_{10} \\ &\vdots \\ \gamma_q &= \gamma_{q0} \end{aligned} \quad \text{, wobei } \alpha, \gamma_{q+1}, \dots, \gamma_{p-1} \text{ außer acht bleiben,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{S^*_{00} - S_{00} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0} - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}^*_k S^*_{k0}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k \cdot S_{k0}} \sim F_{q,\,n-p}$$

verteilt ist. Hierbei sind

$$S^*_{00} = \underset{\text{Def}}{\sum_{i=1}^{n}} \left[(y_i - \bar{y}) - \sum_{k=1}^{q} \gamma_{k0} \, (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}) \right]^2$$

und

$$S^*_{k0} = \underset{\text{Def}}{\sum_{i=1}^{n}} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}) \cdot \left[(y_i - \bar{y}) - \sum_{v=1}^{q} \gamma_{v0} \, (x_{vi} - \bar{x}_{v\cdot}) \right]$$

Spezialfall: $H_0: \begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_{10} \\ &\vdots \\ \gamma_{p-1} &= \gamma_{p-1,0} \end{aligned}$, wobei α außer acht bleibt.

Test:

$$\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - \bar{y}) - \sum_{k=1}^{p-1} \gamma_{k0} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}) \right]^2 - S_{00} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}} \sim F_{p-1,\,n-p}$$

3214. Feststellen des Fehlens einer Assoziation zwischen y und $\mathfrak{x}$, d.h.

$$H_0: \rho_{y \cdot \mathfrak{x}} = 0 \text{ , also } \gamma = 0 \text{ .}$$

Für den multiplen Korrelationskoeffizienten $\rho^2_{y \cdot \mathfrak{x}}$ gilt

$$\rho^2_{y \cdot \mathfrak{x}} = \frac{\gamma' C \gamma}{\sigma^2_y} \text{ ,}$$

wobei

$$C = \text{Dis}\, \mathfrak{x}$$

Da im Regressionsmodell C als nicht-singulär vorausgesetzt ist, ist C als Dispersionsmatrix eigentlich positiv definit. Also ist $\rho_{y \cdot \mathfrak{x}} = 0$ genau dann, wenn $\gamma = 0$. Somit sind

$$H_0^{(1)} : \rho_{y \cdot \mathfrak{x}} = 0 \qquad \text{und} \qquad H_0^{(2)} : \gamma = 0$$

äquivalente Nullhypothesen. Die Nullhypothese $H_0^{(2)}$ wird von dem vorangegangenen Test geprüft:

$$\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - S_{00} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}} \sim F_{p-1, n-p}$$

Dieser Test läßt sich umformen. Bei der linearen Regression stimmt der multiple Korrelationskoeffizient $\rho^2_{y \cdot \mathfrak{x}}$ mit dem Korrelationsverhältnis

$$\eta^2_{y \cdot \mathfrak{x}} = \frac{\sigma^2_{Trend}}{\sigma^2_y}$$

überein

$$\rho^2_{y \cdot \mathfrak{x}} = \frac{\sigma^2_{Trend}}{\sigma^2_y}$$

$$= \frac{\sigma^2_y - \sigma^2_{y \cdot \mathfrak{x}}}{\sigma^2_y}$$

Und der empirische multiple Korrelationskoeffizient ist gleich

$$\hat{\rho}^2_{y \cdot \mathfrak{x}} = \frac{\hat{\sigma}^2_y - \hat{\sigma}^2_{y \cdot \mathfrak{x}}}{\hat{\sigma}^2_y}$$

wobei

$$\hat{\sigma}^2_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \qquad \text{und} \qquad \hat{\sigma}^2_{y \cdot \mathfrak{x}} = \frac{R_0^2}{n-1}$$

Wegen

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

ist

$$\hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}} = \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2} = 1 - \frac{R_0^2}{R_1^2} \quad ,$$

also

$$\frac{R_1^2}{R_0^2} = \frac{1}{1 - \hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}}}$$

Deshalb kann man den Test so schreiben

$$\frac{n-p}{p-1}\left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - 1\right) \sim F_{p-1,\,n-p} \quad ,$$

d.h.

$$\frac{n-p}{p-1} \cdot \left[\frac{1}{1 - \hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}}} - 1\right] \sim F_{p-1,\,n-p} \quad ,$$

d.h.

$$\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}}}{1 - \hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}}} \sim F_{p-1,\,n-p} \quad ,$$

wobei

$$\hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}} = \frac{\sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}}{S_{00}}$$

Der gesuchte Test kann deshalb in der folgenden Form geschrieben werden.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\rho_{y\cdot\mathfrak{x}} = 0$ (Fehlen einer Assoziation zwischen y und $\mathfrak{x}$, d.h. $y \equiv$ konst.)

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}}}{1 - \hat{\rho}^2_{y\cdot\mathfrak{x}}} \sim F_{p-1,\,n-p}$$

verteilt ist.

3215. H_0: $(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_q) = (\alpha_0, \gamma_{10}, \ldots, \gamma_{q0})$,

wobei die restlichen $\gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$(I\ ,\ 0)\ \beta = \begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{q0} \end{vmatrix}$$

Folglich ist

$$H' = (I,0)$$

also

$$k = \text{Rang } H' = q+1$$

Es ist

$$R_1^2 = \operatorname*{Min}_{\gamma_{q+1},\dots,\gamma_{p-1}} \sum_{i=1}^{n} [\,(y_i - \alpha_0 - \gamma_{10}x_{i1} - \dots - \gamma_{q0}x_{qi}) - \gamma_{q+1}x_{q+1,i} -$$

$$\dots - \gamma_{p-1}x_{p-1,i}\,]^2$$

Beim reduzierten Modell

$$\begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu 1} \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu n} \end{vmatrix} = X_2 \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} + e$$

sollen die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

mit $\hat{\gamma}^*_{q+1}, \dots, \hat{\gamma}^*_{p-1}$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$R_1^2 = \begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu 1} \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu n} \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu 1} \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu n} \end{vmatrix} - (\hat{\gamma}^*_{q+1}, \dots, \hat{\gamma}^*_{p-1})X_2'$$

$$\cdot \begin{vmatrix} y_1 - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu 1} \\ \vdots \\ y_n - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\,y_i - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0}x_{\nu i}\,]^2 - \sum_{\nu=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}^*_{\nu} \sum_{i=1}^{n} x_{\nu i}(y_i - \alpha_0 - \sum_{\varrho=1}^{q} \gamma_{\varrho 0}x_{\varrho i})$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$\alpha = \alpha_0$

H_0: $\gamma_1 = \gamma_{10}$, wobei die restlichen $\gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_{p-1}$ außer acht bleiben,
$\vdots$
$\gamma_q = \gamma_{q0}$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{q+1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_{\nu 0} x_{\nu i}]^2 - \sum_{\nu=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_\nu^* \sum_{i=1}^{n} x_{\nu i} (y_i - \alpha_0 - \sum_{\rho=1}^{q} \gamma_{\rho 0} x_{\rho i}) + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0} - S_{00}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}} \sim F_{q+1, n-p}$$

verteilt ist.

3216. H_0: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{p-1} = \gamma^*$, wobei α außer acht bleibt.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 3213.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{p-1} = \gamma^*$, wobei γ^* fest vorgegeben ist und α außer acht bleibt, gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} [(y_i - \bar{y}) - \gamma^* \sum_{k=1}^{p-1} (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot})]^2 - S_{00} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}} \sim F_{p-1, n-p}$$

verteilt ist.

Zweitens. H_0: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{p-1}$, wobei α außer acht bleibt.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$\begin{matrix} \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \vdots \\ \gamma_1 - \gamma_{p-1} = 0 \end{matrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} = 0$$

Folglich ist

$$H' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & & -1 \end{vmatrix} ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = p-2$$

Es ist

$$R_1^2 = \min_{\alpha,\gamma} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \gamma x_{\cdot 1})^2$$

Beim reduzierten Modell

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{\cdot 1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{\cdot n} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + e$$

sollen die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

mit $\hat{\alpha}^*$, $\hat{\gamma}^*$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$R_1^2 = S_{00} - \hat{\gamma}^* \sum_{i=1}^{n} (x_{\cdot 1} - \bar{\xi})(y_1 - \bar{y}) ,$$

wobei

$$\bar{\xi} = \frac{x_{\cdot 1} + \ldots + x_{\cdot n}}{n} = (p-1) \frac{\sum x_{k1}}{(p-1)\cdot n} = (p-1)\cdot \bar{x}_{\cdot\cdot}$$

und

$$\hat{\gamma}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_{\cdot 1} - (p-1)\bar{x}_{\cdot\cdot}](y_1 - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} [x_{\cdot 1} - (p-1)\bar{x}_{\cdot\cdot}]^2}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{p-1}$, wobei α außer acht bleibt, gültig sei, ist, daß die

folgende Prüfgröße

$$\frac{n-p}{p-2} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0} - \frac{[\sum_{i=1}^{n} (x_{\cdot 1} - (p-1)\bar{x}_{\cdot\cdot})(y_1 - \bar{y})]^2}{\sum_{i=1}^{n} [x_{\cdot 1} - (p-1)\bar{x}_{\cdot\cdot}]^2}}{S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}} \sim F_{p-2,\, n-p}$$

verteilt ist.

3217. $H_0: \sum_{k=1}^{p-1} a_k \gamma_k = a$, wobei α außer acht bleibt.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$(0, \mathfrak{a}') \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = a \ , \quad \mathfrak{a}' = (a_1, \dots, a_{p-1})$$

Folglich ist

$$H' = (0, \mathfrak{a}') \ ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = 1$$

Ferner ist

$$H' S^{-1} H = (0, \mathfrak{a}') S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix}$$

ein Skalar, und es ist

$$\hat{\Theta} - \Theta_0 = \sum_{k=1}^{p-1} a_k \hat{\gamma}_k - a$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese $H_0: \sum_{k=1}^{p-1} a_k \gamma_k = a$, wobei α außer acht bleibt, gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$(n-p) \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^{p-1} a_k \hat{\gamma}_k - a \right)^2}{\left(S_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0} \right) \left[(0, \mathfrak{a}') S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix} \right]} \sim F_{1, n-p}$$

verteilt ist.

322. 2 Regressionsmodelle

Das Modell läßt sich so schreiben

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1, & 0 \\ 0, & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + e$$

3221. Die Prüfung der Gleichheit zweier Regressionshyperebenen.

$$H_0: \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha' \\ \gamma_1 &= \gamma_1' \\ &\vdots \\ \gamma_{p-1} &= \gamma_{p-1}' \end{aligned}$$

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= 0 \\ \gamma_1 - \gamma_1' &= 0 \\ &\vdots \\ \gamma_{p-1} - \gamma_{p-1}' &= 0 \end{aligned} \quad , \qquad \text{d.h.} \quad (1, -1) \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix} = 0$$

Folglich ist

$$H' = (1, -1),$$

also

$$k = \text{Rang } H' = p$$

Beim reduzierten Modell

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \beta + e$$

soll die Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit $\hat{\beta}^*$ bezeichnet werden, dann gilt

$$R_1^2 = \min_{\beta} \left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \beta \right]' \left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \beta \right]$$

$$R_1^2 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \hat{\beta}^{*\prime} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (y_i - \bar{y}^{(tot)})^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (x_{ki} - \bar{x}_k^{(tot)}) (y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$= s_{00}^{(tot)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* s_{k0}^{(tot)}$$

Hierbei lassen sich die Produktsummen "total" aus denen der beiden Modelle berechnen. Wegen

$$\bar{y}^{(tot)} = \frac{n_1 \bar{y}^{(1)} + n_2 \bar{y}^{(2)}}{n_1 + n_2}$$

ist

$$y_1 - \bar{y}^{(tot)} = y_1 - \bar{y}^{(1)} + \frac{(n_1 + n_2)\bar{y}^{(1)} - n_1 \bar{y}^{(1)} - n_2 \bar{y}^{(2)}}{n_1 + n_2}$$

$$= y_1 - \bar{y}^{(1)} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)}) \; ;$$

analog

$$y_1 - \bar{y}^{(tot)} = y_1 - \bar{y}^{(2)} + \frac{n_1}{n_1 + n_2} (\bar{y}^{(2)} - \bar{y}^{(1)})$$

$$x_1 - \bar{x}^{(tot)} = x_1 - \bar{x}^{(1)} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} (\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})$$

$$x_1 - \bar{x}^{(tot)} = x_1 - \bar{x}^{(2)} + \frac{n_1}{n_1 + n_2} (\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}) \; ,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2} (y_i - \bar{y}^{(tot)})^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (y_i - \bar{y}^{(tot)})^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_i - \bar{y}^{(tot)})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \left[(y_i - \bar{y}^{(1)})^2 + \frac{2 n_2}{n_1+n_2} (y_i - \bar{y}^{(1)})(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)}) + \frac{n_2^2}{(n_1+n_2)^2} (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2 \right]$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_i - \bar{y}^{(2)})^2 + \frac{2 n_1}{n_1+n_2} (y_i - \bar{y}^{(2)})(\bar{y}^{(2)} - \bar{y}^{(1)}) + \frac{n_1^2}{(n_1+n_2)^2} (\bar{y}^{(2)} - \bar{y}^{(1)})^2$$

$$= S_{yy}^{(1)} + S_{yy}^{(2)} + 0 + 0 + \left(\frac{n_2^2 n_1}{(n_1+n_2)^2} + \frac{n_2 n_1^2}{(n_1+n_2)^2} \right) (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2$$

$$= S_{yy}^{(1)} + S_{yy}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2} (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2 \; ,$$

d.h.

$$S_{yy}^{(tot)} = S_{yy}^{(1)} + S_{yy}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2$$

Ferner gilt

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_2}(x_i - \bar{x}^{(tot)})(y_i - \bar{y}^{(tot)}) = \sum_{i=1}^{n_1}\left[(x_i - \bar{x}^{(1)}) + \frac{n_2}{n_1+n_2}(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})\right]$$

$$\cdot\left[(y_i - \bar{y}^{(1)}) + \frac{n_2}{n_1+n_2}(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})\right]$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left[(x_i - \bar{x}^{(2)}) + \frac{n_1}{n_1+n_2}(\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)})\right]\cdot\left[(y_i - \bar{y}^{(2)}) + \frac{n_1}{n_1+n_2}(\bar{y}^{(2)} - \bar{y}^{(1)})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x}^{(1)})(y_i - \bar{y}^{(1)}) + 0 + 0 + \frac{n_2^2 n_1}{(n_1+n_2)^2}(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}(x_i - \bar{x}^{(2)})(y_i - \bar{y}^{(2)}) + 0 + 0 + \frac{n_1^2 n_2}{(n_1+n_2)^2}(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})$$

$$= S_{xy}^{(1)} + S_{xy}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})\cdot(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})$$

Zusammenfassend

$$S_{00}^{(tot)} = S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2$$

$$S_{k0}^{(tot)} = S_{k0}^{(1)} + S_{k0}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{x}_{k\cdot}^{(1)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})$$

Deshalb ist

$$R_1^2 = S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2$$

$$- \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \left[S_{k0}^{(1)} + S_{k0}^{(2)} + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{x}_{k\cdot}^{(1)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})\right.$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ \gamma_1 = \gamma_1' \\ \quad\vdots \\ \gamma_{p-1} = \gamma_{p-1}' \end{array}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1+n_2-2p}{p} \cdot \left\{ \frac{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}\left[(\bar{y}^{(1)}-\bar{y}^{(2)})^2 - \sum_{k=1}^{p-1}\hat{\gamma}_k^*(\bar{x}_{k\cdot}^{(1)}-\bar{x}_{k\cdot}^{(2)})(\bar{y}^{(1)}-\bar{y}^{(2)})\right] + \sum_{k=1}^{p-1} S_{k0}^{(1)}(\hat{\gamma}_k^{(1)}-\hat{\gamma}_k^*)}{S_{00}^{(1)}+S_{00}^{(2)}-\sum_{k=1}^{p-1}\hat{\gamma}_k^{(1)}S_{k0}^{(1)}-\sum_{k=1}^{p-1}\hat{\gamma}_k^{(2)}S_{k0}^{(2)}} \right.$$

$$\left. \frac{+\sum_{k=1}^{p-1} S_{k0}^{(2)}(\hat{\gamma}_k^{(2)}-\hat{\gamma}_k^*)}{\cdots} \right\} \sim F_{p,\, n_1+n_2-2p}$$

verteilt ist

3222. $H_0: (\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}) = (\gamma_1', \ldots, \gamma_{p-1}')$,

wobei α und α' außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & , 1 , & -1 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \gamma \\ \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Folglich ist

$$H' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & , 1 , & -1 \\ 0 & 0 & & \end{vmatrix},$$

also

$$k = \text{Rang } H' = p-1$$

Es ist

$$R_1^2 = \underset{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\gamma}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{n_1} (y_i - \alpha_1 - \gamma' \mathfrak{x}_i)^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_i - \alpha_2 - \gamma' \mathfrak{x}_i)^2$$

Daraus folgen

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_1^2}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^{n_1} (y_i - \alpha_1 - \gamma' \mathfrak{x}_i)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_1^2}{\partial \alpha_2} = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_i - \alpha_2 - \gamma' \mathfrak{x}_i) \ ,$$

also

$$\hat{\alpha}_1^* = \bar{y}^{(1)} - \gamma' \bar{\mathfrak{x}}^{(1)} \quad , \quad \hat{\alpha}_2^* = \bar{y}^{(2)} - \gamma' \bar{\mathfrak{x}}^{(2)}$$

und

$$R_1^2 = \underset{\gamma}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{n_1} [\,(y_i - \bar{y}^{(1)}) - \gamma' (\mathfrak{x}_i - \bar{\mathfrak{x}}^{(1)})\,]^2$$

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} [\,(y_i - \bar{y}^{(2)}) - \gamma' (\mathfrak{x}_i - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)})\,]^2 \ ,$$

also

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_1^2}{\partial \gamma_k} = \sum_{i=1}^{n_1} [\,(y_i - \bar{y}^{(1)}) - \gamma' (\mathfrak{x}_i - \bar{\mathfrak{x}}^{(1)})\,] (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)})$$

$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} [(y_i - \bar{y}^{(2)}) - \gamma' (\mathfrak{x}_i - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)})\,] (x_{ki} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})$$

$$= 0$$

d.h.

$$S_{k0}^{(1)} + S_{k0}^{(2)} - \sum_{\nu=1}^{p-1} \hat{\gamma}_\nu^* (S_{\nu k}^{(1)} + S_{\nu k}^{(2)}) = 0 \, ; \; k = 1, \ldots, p-1$$

Aus diesen Normalgleichungen lassen sich $\hat{\gamma}_1^*, \ldots, \hat{\gamma}_{p-1}^*$ berechnen

Andererseits berechnet sich R_1^2 aus dem reduzierten Modell

$$\begin{vmatrix} y_1 - \bar{y}^{(1)} \\ \vdots \\ y_{n_1+n_2} - \bar{y}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} - \bar{x}_{1\cdot}^{(1)}, \ \ldots \ , x_{p-1,1} - \bar{x}_{p-1,\cdot}^{(1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{1,n_1+n_2} - \bar{x}_{1\cdot}^{(2)}, \ \ldots \ , x_{p-1,n_1+n_2} - \bar{x}_{p-1,\cdot}^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} + e \ ,$$

d.h.

$$\mathfrak{z} = Z \cdot \gamma + e$$

Also ist

$$R_1^2 = \mathfrak{z}'\mathfrak{z} - \hat{\gamma}^{*\prime} Z'\mathfrak{z}$$
$$= S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* (S_{k0}^{(1)} + S_{k0}^{(2)}) \quad ,$$

wobei die $\hat{\gamma}_k^*$ aus den obigen Normalgleichungen auszurechnen sind.

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma_1' \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} = \gamma_{p-1}' \end{matrix} \quad \text{, wobei } \alpha \text{ und } \alpha' \text{ außer acht bleiben,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1 + n_2 - 2p}{p-1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\gamma}_k^{(1)} - \hat{\gamma}_k^*) S_{k0}^{(1)} + \sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\gamma}_k^{(2)} - \hat{\gamma}_k^*) S_{k0}^{(2)}}{S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^{(1)} S_{k0}^{(1)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^{(2)} S_{k0}^{(2)}} \sim F_{p-1,\, n_1 + n_2 - 2p}$$

verteilt ist.

3223. H_0: $\alpha = \alpha'$, wobei die γ_i und γ_k' außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$(1, -1, 0, \ldots, 0) \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \gamma \\ \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

Folglich ist

$$H' = (1, -1, 0, \ldots, 0) \,,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = 1$$

Beim reduzierten Modell

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{X}_1, & 0 \\ 0, & \tilde{X}_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} + e$$

sollen die Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

mit $\hat{\gamma}_i^*$ und $\hat{\gamma}_k^*$ bezeichnet werden, dann gilt

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2}(y_i - \bar{y}^{(tot)})^2 - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (\delta_i^{(1)} \cdot x_{ki}^{(1)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)})(y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$- \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k'^* \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (\delta_i^{(2)} \cdot x_{ki}^{(2)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})(y_i - \bar{y}^{(tot)}) \quad ,$$

wobei

$$\bar{x}_{k\cdot}^{(1)} = {}_{Def} \quad \frac{1}{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{n_1} x_{ki}^{(1)} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\, \bar{x}_{k\cdot}^{(1)} \quad , \quad \delta_i^{(1)} = \begin{cases} 1, & i \leq n_1 \\ 0, & i > n_1 \end{cases}$$

und

$$\bar{x}_{k\cdot}^{(2)} = {}_{Def} \quad \frac{1}{n_1+n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{ki}^{(2)} = \frac{n_2}{n_1+n_2}\, \bar{x}_{k\cdot}^{(2)} \quad , \quad \delta_i^{(2)} = \begin{cases} 0, & i \leq n_1 \\ 1, & i > n_1 \end{cases}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\alpha = \alpha'$, wobei die γ_i und γ_k' außer acht bleiben, gültig sei,

ist, daß die folgende Prüfgröße

$$(n_1+n_2-2p) \cdot \frac{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}^{(1)} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k' S_{k0}^{(2)} - \{\cdots\}}{S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}^{(1)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k' S_{k0}^{(2)}}$$

$$\sim F_{1, n_1+n_2-2p}$$

verteilt ist, wobei

$$\{\cdots\} = {}_{Def} \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ki}^{(1)} - 0)(y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k'^* \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{ki}^{(2)} - 0)(y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

3224. H_0: $(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_q) = (\alpha', \gamma'_1, \ldots, \gamma'_q)$,

wobei die restlichen γ_i, γ'_k außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$\begin{matrix} \alpha - \alpha' = 0 \\ \gamma_1 - \gamma'_1 = 0 \\ \vdots \\ \gamma_q - \gamma'_q = 0 \end{matrix} \quad , \quad \text{d.h.} \quad (1,0,-1,0) \begin{vmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \gamma'_{p-1} \end{vmatrix} = 0$$

Folglich ist

$$H' = (1, 0, -1, 0) \ ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = q + 1$$

Es ist

$$R_1^2 = \underset{\delta, \epsilon, \epsilon'}{\text{Min}} \left[\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Z_1, W_1, 0 \\ Z_2, 0, W_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta \\ \epsilon \\ \epsilon' \end{vmatrix} \right]' \left[\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Z_1, W_1, 0 \\ Z_2, 0, W_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta \\ \epsilon \\ \epsilon' \end{vmatrix} \right] ,$$

wobei

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_q \end{vmatrix} , \ \epsilon = \begin{vmatrix} \gamma_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} , \ \epsilon' = \begin{vmatrix} \gamma'_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma'_{p-1} \end{vmatrix}$$

Also ist

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (y_1 - \bar{y}^{(tot)})^2 - \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (x_{k1} - \bar{x}_{k0}^{(tot)})(y_1 - \bar{y}^{(tot)})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \left[\sum_{i=1}^{n_1} (x_{k1}^{(1)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)})(y_1 - \bar{y}^{(tot)}) - \bar{x}_{k\cdot}^{(1)} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_1 - \bar{y}^{(tot)}) \right]$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'_k{}^* \left[\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x_{k1}^{(2)} - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)})(y_1 - \bar{y}^{(tot)}) - \bar{x}_{k\cdot}^{(2)} \sum_{i=1}^{n_1} (y_1 - \bar{y}^{(tot)}) \right]$$

wobei die $\hat{\gamma}_k^*$, $\hat{\gamma}'_k{}^*$ sie Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate sind, und zwar beim reduzierten Modell

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_1 , W_1 , 0 \\ Z_2 , 0 , W_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{vmatrix} + e \quad ;$$

ferner bezeichnen

$$\bar{x}^{(1)}_{k\cdot} = {}_{Def} \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^{n_1} x^{(1)}_{k\,i} \quad \text{und} \quad \bar{x}^{(2)}_{k\cdot} = {}_{Def} \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x^{(2)}_{k\,i}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \gamma_1 = \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma_q = \gamma'_q \end{matrix} \quad , \text{ wobei die } \gamma_1 , \gamma'_k \text{ außer acht bleiben,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1+n_2-2p}{q+1} \cdot \frac{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} (\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2 + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S^{(1)}_{k0} + \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}'_k S^{(2)}_{k0} - \{\cdots\}}{S^{(1)}_{00} + S^{(2)}_{00} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S^{(1)}_{k0} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}'_k S^{(2)}_{k0}}$$

$$\sim F_{q+1,\, n_1+n_2-2p}$$

verteilt ist. Hierbei ist

$$\{\cdots\} = {}_{Def} \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}^*_k \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (x_{k\,i} - \bar{x}^{(tot)}_{k\cdot})(y_i - \bar{y}^{(tot)})$$

$$+ \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}^*_k \left[\sum_{i=1}^{n_1} (x^{(1)}_{k\,i} - 0)(y_i - \bar{y}^{(tot)}) \right]$$

$$+ \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'^*_k \left[\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (x^{(2)}_{k\,i} - 0)(y_i - \bar{y}^{(tot)}) \right]$$

3225. $H_0: (\gamma_1, \ldots, \gamma_q) = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_q)$,

wobei α , α' und die restlichen γ_i , γ'_k außer acht bleiben.

Die Nullhypothese läßt sich so schreiben

$$\begin{matrix} \gamma_1 - \gamma'_1 = 0 \\ \vdots \\ \gamma_q - \gamma'_q = 0 \end{matrix} \quad \text{, d.h. } (0, 1, 0, -1, 0) \begin{vmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \gamma'_{p-1} \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Folglich ist

$$H' = (0, 1, 0, -1, 0) \ ,$$

also

$$k = \text{Rang } H' = q$$

Es ist

$$R_1^2 = \underset{\alpha,\alpha',\delta,\epsilon,\epsilon'}{\text{Min}} \left[\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & Z_1 \ , W_1 \ , 0 & \\ 0 & 1 & Z_2 \ , 0 \ , W_2 & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha' \\ \delta \\ \epsilon \\ \epsilon' \end{vmatrix} \right] \ , \left[\quad \ldots \quad \right]$$

wobei

$$\delta \underset{\text{Def.}}{=} \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_q \end{vmatrix} \ , \quad \epsilon \underset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} \gamma_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \end{vmatrix} \ , \quad \epsilon' \underset{\text{Def}}{=} \begin{vmatrix} \gamma'_{q+1} \\ \vdots \\ \gamma'_{p-1} \end{vmatrix}$$

Also

$$R_1^2 = Y'Y - \hat{\beta}^{*\prime} A'Y$$

Dabei ist

$$A'Y = \begin{vmatrix} 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1 \\ Z'_1 \quad , Z'_2 \\ W'_1 \quad , 0 \\ 0 \quad , W'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_1 \bar{y}^{(1)} \\ n_2 \bar{y}^{(2)} \\ \sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_{ki} y_i \ , \begin{cases} k = 1 \\ \vdots \\ k = q \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n_1} x_{ki} y_i \ , \begin{cases} k = q+1 \\ \vdots \\ k = p-1 \end{cases} \\ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{ki} y_i \ , \begin{cases} k = q+1 \\ \vdots \\ k = p-1 \end{cases} \end{vmatrix}$$

also

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} y_i^2 - n_1 \bar{y}^{(1)} \hat{\alpha}^* - n_2 \bar{y}^{(2)} \hat{\alpha}'^* - \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_{k\,i} y_i$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1} x_{k\,i} y_i \quad - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'^*_k \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{k\,i} y_i$$

Aus den Bestimmungsgleichungen von $\hat{\alpha}^*$ und $\hat{\alpha}'^*$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich

$$\hat{\alpha}^* = \bar{y}^{(1)} - \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* \bar{x}_{k\cdot}^{(1)} - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \bar{x}_{k\cdot}^{(1)}$$

und

$$\hat{\alpha}'^* = \bar{y}^{(2)} - \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* \bar{x}_{k\cdot}^{(2)} - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'^*_k \bar{x}_{k\cdot}^{(2)}$$

Folglich ist

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} y_{1i}^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} y_{1i}^2 - n_1 [\bar{y}^{(1)}]^2 + \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* n_1 \bar{x}_{k\cdot}^{(1)} \bar{y}^{(1)} + \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* n_1 \bar{x}_{k\cdot}^{(1)} \bar{y}^{(1)}$$

$$- n_2 [\bar{y}^{(2)}]^2 + \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* n_2 \bar{x}_{k\cdot}^{(2)} \bar{y}^{(2)} + \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'^*_k n_2 \bar{x}_{k\cdot}^{(2)} \bar{y}^{(2)}$$

$$- \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1+n_2} x_{k\,i} y_i \quad - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* \sum_{i=1}^{n_1} x_{k\,i} y_i \quad - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'^*_k \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{k\,i} y_i$$

$$= S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} - \sum_{k=1}^{q} \hat{\gamma}_k^* (S_{k0}^{(1)} + S_{k0}^{(2)})$$

$$- \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}_k^* S_{k0}^{(1)} - \sum_{k=q+1}^{p-1} \hat{\gamma}'^*_k S_{k0}^{(2)}$$

Somit lautet der gesuchte

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma_q = \gamma'_q \end{matrix}$$, wobei α , α' und die restlichen γ_i , γ'_k außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n_1+n_2-2p}{q} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{p-1} (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}^*_k) S_{k0}^{(1)} + \sum_{k=q+1}^{p-1} (\hat{\gamma}'_k - \hat{\gamma}'^*_k) S_{k0}^{(2)} + \sum_{k=1}^{q} (\hat{\gamma}'_k - \hat{\gamma}^*_k) S_{k0}^{(2)}}{S_{00}^{(1)} + S_{00}^{(2)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}_k S_{k0}^{(1)} - \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\gamma}'_k S_{k0}^{(2)}}$$

$$\sim F_{q, n_1+n_2-2p}$$

verteilt ist.

323. K $\geqslant$ 2 Regressionsmodelle .

Die notwendigen und hinreichenden Tests für die jeweilige Nullhypothese zum Prüfen angenommener oder zum Vergleich unbekannter Regressionskoeffizienten ergeben sich wortwörtlich wie bei den bisherigen Fällen. Wir verzichten deshalb auf eine nochmalige Herleitung. Die fix und fertigen Formeln für die numerische Handhabung der Tests sind in der Formelsammlung unter den Nr. 26 bis 35 zu finden ; die Nullhypothesen stehen auf den Übersichtsblättern S. 12 und 13 .

4. PRÜFUNG , VERGLEICH UND LINEARE HYPOTHESEN BEI ERWARTUNGSWERTEN VON UNABHÄNGIGEN NORMALVERTEILUNGEN MIT DISPERSIONSMATRIZEN DER ART

$$\text{Dis } Y = \begin{vmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{vmatrix} = \sigma^2 \cdot I$$

40. ZUSAMMENSTELLUNG DER TESTS UND FORMELSAMMLUNG .

Prüfung und Vergleich von Erwartungswerten bei unabhängigen Normalverteilungen mit $Dis\, Y_\nu = \sigma^2 \cdot I_\nu$					
Prüfung angenommener Erwartungswerte	Vergleich unbekannter Erwartungswerte	Innerhalb der Stichproben	1 Stichprobe	Mehrfache Normalverteilung	11
					10
					9
			$k \geq 2$ Stichproben	Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	14
					13
					12
				Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	17
					16
					15
		Zwischen den Stichproben	2 Stichproben	Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	20
					19
				Einfache Normalverteilungen	18
			$k \geq 2$ Stichproben	Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	25
					24
					23
				Einfache Normalverteilungen	22
				Mehrfache Normalvert. versch. Dim.	21
				Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	27
					26
	1 Stichprobe	$k \geq 2$ Stichproben		Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	6
					5
				Einfache Normalverteilungen	4
				Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	8
					7
		1 Stichprobe		Mehrfache Normalverteilung	3
					2
				Einfache Normalverteilung	1

Lineare Hypothesen und Systeme von linearen Hypothesen bei unabhängigen Normalverteilungen, Dis $Y_v = \sigma^2 I_v$

Lineare Hypothesen

Innerhalb der Stichpr.

1 Stichpr.

Mehrfache Normalverteilung	28

$k \geqq 2$ Stichproben

Mehrfache Normalverteilungen, auch verschiedener Dimension	29
Einfache Normalverteilungen	30
Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	31
	32
Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	33

Zwischen den Stichproben

Mehrfache Normalverteilung	34
Mehrfache Normalverteilungen, auch verschiedener Dimension	35
Einfache Normalverteilungen	36
Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	37
Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	38

Systeme von linearen Hypothesen

Innerhalb der Stichproben

1 Stichpr.

Mehrfache Normalverteilung	28

$k \geqq 2$ Stichproben

Mehrfache Normalverteilungen, auch verschiedener Dimension	29
Einfache Normalverteilungen	30
Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	31
	32
Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	33

Zwischen den Stichproben

Mehrfache Normalverteilung	34
Mehrfache Normalverteilungen, auch verschiedener Dimension	35
Einfache Normalverteilungen	36
Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension	37
Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension	38

Nullhypothesen

1) $\mu = \mu^*$, wobei μ^* fest vorgegeben ist.

2) $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_1 \\ \vdots \\ \mu^*_p \end{pmatrix}$ wobei die μ^*_i fest vorgegeben sind.

3) $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_1 \\ \vdots \\ \mu^*_q \end{pmatrix}$ wobei die restlichen $\mu_{\alpha,\beta}$ außer acht bleiben.

4) $\mu_1 = \mu^*_1, \ \dots \ , \ \mu_k = \mu^*_k$.

5) $\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{p1} \end{pmatrix} ; \dots ; \begin{pmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{pk} \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{q1} \end{pmatrix} ; \dots ; \begin{pmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{qk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{qk} \end{pmatrix}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha,\beta}$ außer acht bleiben.

7) $\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p_1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{p_1,1} \end{pmatrix} ; \dots ; \begin{pmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{p_k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{p_k,k} \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_1,1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_k,k} \end{pmatrix}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha,\beta}$ außer acht bleiben.

9) $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$

10) $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$, wobei die restlichen μ_α außer acht bleiben.

11) $\mu_1 = \ldots = \mu_{q_1}$ wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

$\mu_{q_1+1} = \ldots = \mu_{q_2}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\mu_{q_{k-1}} = \ldots = \mu_{q_k}$

12) $\mu_{11} = \ldots = \mu_{p1}, \ \ldots \ , \ \mu_{1k} = \ldots = \mu_{pk}$

13) $\mu_{11} = \ldots = \mu_{q_{1,1}}; \ldots ; \ \mu_{1k} = \ldots = \mu_{q_{k,k}}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

14) $\mu_{11} = \ldots = \mu_{q_1^{(1)},1}; \ldots ; \ \mu_{1k} = \ldots = \mu_{q_1^{(k)},k}$

$\mu_{q_1^{(1)}+1,1} = \ldots = \mu_{q_2^{(1)},1}; \ldots ; \ \mu_{q_1^{(k)}+1,k} = \ldots = \mu_{q_2^{(k)},k}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\mu_{q_{a_1-1}^{(1)}+1,1} = \ldots = \mu_{q_{a_1-1}^{(1)}+1,1} \ldots \mu_{q_{a_k-1}^{(k)}+1,k} = \ldots = \mu_{q_{a_k}^{(k)},k}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

15) $\mu_{11} = \ldots = \mu_{p_1,1}; \ \ldots \ ; \ \mu_{1k} = \ldots = \mu_{p_k,k}$

16) $\mu_{11} = \ldots = \mu_{q_1,1}; \ \ldots \ ; \ \mu_{1k} = \ldots = \mu_{q_k,k}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

17) $\mu_{11} = \ldots = \mu_{q_1^{(1)},1} \ \ldots \ \mu_{1k} = \ldots\ldots\ldots = \mu_{q_1^{(k)},k}$

$\mu_{q_1^{(1)}+1,1} = \ldots = \mu_{q_2^{(1)},1} \ \ldots \ \mu_{q_1^{(k)}+1,k} = \ldots = \mu_{q_2^{(k)},k}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\mu_{q_{a_1-1}^{(1)}+1,1} = \ldots = \mu_{q_{a_1}^{(1)},1} \ \ldots \ \mu_{q_{a_k-1}^{(k)}+1,k} = \ldots = \mu_{q_{a_k}^{(k)},k}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

18) $\mu_1 = \mu_2$

19) $\begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

21) vgl. 20)

22) $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$

23) $\begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{pk} \end{vmatrix}$

24) $\begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{qk} \end{vmatrix}$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

25) $\begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1,1} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} \mu_{1,x_1} \\ \vdots \\ \mu_{q_1,x_1} \end{vmatrix}; \dots; \begin{vmatrix} \mu_{1,x_s} \\ \vdots \\ \mu_{q_s,x_s} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_s,k} \end{vmatrix}$

26) vgl. 24)

27) vgl. 25)

28) $\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \mu_\nu = b$

29) $\begin{aligned} a_{11} \cdot \mu_{11} + \dots + a_{p_1,1} \cdot \mu_{p_1,1} &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{1k} \cdot \mu_{1k} + \dots + a_{p_k,k} \cdot \mu_{p_k,k} &= b_k \end{aligned}$

30) vgl. 28)

31) $\begin{aligned} a_{11} \cdot \mu_{11} + \dots + a_{1k} \cdot \mu_{1k} &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{p1} \cdot \mu_{p1} + \dots + a_{pk} \cdot \mu_{pk} &= b_p \end{aligned}$

32) $a_{11} \cdot \mu_{11} + \dots + a_{1k} \cdot \mu_{1k} = b_1$ wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

$\vdots$

$a_{q1} \cdot \mu_{q1} + \dots + a_{qk} \cdot \mu_{qk} = b_k$

33) vgl 32)

34) $A'\mu = b$

Die Anzahl der Zeilen von A soll mit α bezeichnet werden; alle Zeilen von A können o.B.d.A. als linear unabhängig vorausgesetzt werden

Für die Tests 35) bis 38) sollen dieselben Voraussetzungen gelten wie in 34).

35) $A_1' \mu_1 = b_1, \dots, A_k' \mu_k = b_k$

36) $A' \mu = b$, wobei

$$\mu =_{Def} \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{vmatrix}$$

37) $A_1' \cdot \mu_1 = b_1, \dots, A_p' \cdot \mu_p = b_p$

38) $A_1' \cdot \mu_1 = b_1, \dots, A_q' \cdot \mu_q = b_q$,

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben. Hierbei ist $q \leq$ kleinste Dimension.

Tests

Alle Prüfgrößen dieser Testserie sind $F_{L,1}$ verteilt.

Aus Platzmangel konnten manchmal diese Freiheitsgrad-Indizes nicht explizit angegeben werden; sie sind jedoch aus der Prüfgröße sofort zu ersehen, denn letztere haben alle die Gestalt

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \; F_{L,1}$$

Da die vorkommenden Nenner sich des öfteren wiederholen, werden sie nunmehr ausführlich geschrieben an den Anfang gestellt und später, auch aus Platzersparnis, nur in der abgekürzten Form, z.B. N_3 verwendet.

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \quad , \quad N_9 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_\nu^{(\tau)} - \bar{x}_\cdot^{(\tau)})^2$$

$$N_2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2$$

$$N_3 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{\tau\nu} - \bar{x}_{\tau\cdot})^2$$

$$N_4 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2$$

$$N_5 = \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2$$

$$N_6 = \sum_{\tau=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_\nu^{(\tau)} - \bar{x}_\cdot^{(\tau)})^2$$

$$N_7 = \sum_{\tau=1}^{l} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2$$

$$N_8 = \sum_{\tau=1}^{l} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2$$

1) $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{1}{N_1} \cdot n \cdot (\bar{x} - \mu^*)^2 \sim F_{1,n-1}$

2) $\frac{p \cdot (n-1)}{p} \cdot \frac{1}{N_2} \cdot n \cdot (\bar{x} - \mu^*)' \cdot (\bar{x} - \mu^*) \sim F_{p,p\cdot(n-1)}$

3) $\frac{p \cdot (n-1)}{q} \cdot \frac{1}{N_2} \cdot n \cdot (\bar{x}_{(1)} - \mu^*_{(1)})' \cdot (\bar{x}_{(1)} - \mu^*_{(1)}) \sim F_{q,p\cdot(n-1)}$

4) $\frac{\sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{k} \cdot \frac{1}{N_3} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}_{\tau\cdot} - \mu_\tau^*)^2 \sim F_{k,\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}$

5) $\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{k \cdot p} \cdot \frac{1}{N_4} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \left(\bar{x}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*}\right)' \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*}\right) \sim F_{L,e}$

6) $\frac{P \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{k \cdot q} \cdot \frac{1}{N_4} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \left(\bar{x}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)}\right)' \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)}\right) \sim F_{L,e}$

7) $\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau} \cdot \frac{1}{N_5} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*}\right)' \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*}\right) \sim F_{L,e}$

8) $\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau} \cdot \frac{1}{N_5} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)}\right)' \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)}\right) \sim F_{L,e}$

9) $\frac{p \cdot (n-1)}{p-1} \cdot \frac{1}{N_2} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2 \sim F_{p-1,p\cdot(n-1)}$

10) $$\frac{p\cdot(n-1)}{q-1}\cdot\frac{1}{N_2}\cdot n\cdot\sum_{i=1}^{q}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{*})^2 \sim F_{q-1,\,p\cdot(n-1)}$$

11) $$\frac{p\cdot(n-1)}{\sum_{\tau=1}^{k}(\varkappa_\tau-1)}\cdot\frac{1}{N_2}\cdot n\cdot\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i\in\tau\text{ten Block}}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2 \sim F_{L,\,l}$$

$\varkappa_\tau$ = Anzahl der μ_ν im τten Block

12) $$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{k\cdot(p-1)}\cdot\frac{1}{N_4}\cdot\sum_{\tau=1}^{k}\left\{n_\tau\cdot\sum_{i=1}^{p}(\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)})^2\right\} \sim F_{L,\,l}$$

13) $$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{\sum_{\tau=1}^{k}(q_\tau-1)}\cdot\frac{1}{N_4}\cdot\sum_{\tau=1}^{k}\left\{n_\tau\cdot\sum_{i=1}^{q_\tau}(\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2\right\} \sim F_{L,\,l}$$

14) $$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{a_\tau}(\varkappa_\nu^{(\tau)}-1)}\cdot\frac{1}{N_4}\cdot\sum_{\tau=1}^{k}\left\{n_\tau\cdot\sum_{\nu=1}^{a_\tau}\sum_{i\in\nu\text{ten Block}}(\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau),(\nu)})^2\right\} \sim F_{L,\,l}$$

15) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{\sum_{\tau=1}^{k}(p_\tau-1)}\cdot\frac{1}{N_5}\cdot\sum_{\tau=1}^{k}\left\{n_\tau\cdot\sum_{i=1}^{p_\tau}(\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)})^2\right\} \sim F_{L,\,l}$$

16) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{\sum_{\tau=1}^{k}(q_\tau-1)}\cdot\frac{1}{N_5}\cdot\sum_{\tau=1}^{k}\left\{n_\tau\cdot\sum_{i=1}^{q_\tau}(\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2\right\} \sim F_{L,\,l}$$

17) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{a_\tau} (x_\nu^{(\tau)} - 1)} \cdot \frac{1}{N_5} \sum_{\tau=1}^{k} \left\{ n_\tau \cdot \sum_{\nu=1}^{a_\tau} \sum_{\text{ievlam Block}} (\bar{x}_{i.}^{(\tau)} - \bar{x}_{..}^{(\tau),(\nu)})^2 \right\} \sim F_{L,l}$$

18) $$\frac{n_1 + n_2 - 2}{1} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (\bar{x}_{.}^{(1)} - \bar{x}_{.}^{(2)})^2}{(n_1 + n_2) \cdot N_6} \sim F_{1,\, n_1 + n_2 - 2}$$

19) $$\frac{p \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{p} \cdot \frac{1}{N_7} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot (\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)})' \cdot (\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(2)}) \sim F_{L,l}$$

20) $$\frac{p \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{q} \cdot \frac{1}{N_7} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)})' \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}) \sim F_{L,l}$$

21) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{2} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{q} \cdot \frac{1}{N_8} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)})' \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}) \sim F_{L,l}$$

22) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau - k}{k-1} \cdot \frac{1}{N_9} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}_{.}^{(\tau)} - \bar{x}_{.}^{(tot)})^2 \sim F_{L,l}$$

23) $$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{p \cdot (k-1)} \cdot \frac{1}{N_4} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}^{(\tau)} - \bar{x}^{(tot)})' \cdot (\bar{x}^{(\tau)} - \bar{x}^{(tot)})^2 \sim F_{L,l}$$

24) $$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{q \cdot (k-1)} \cdot \frac{1}{N_4} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}) \sim F_{L,l}$$

25) $$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{\sum_{i=1}^{s}q_i\cdot(a_i-1)}\cdot\frac{1}{N_4}\cdot\sum_{j=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{a_j}n_{\tau j}\left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau,j)}-\bar{x}_{(1)}^{(tot)j}\right)^{!}\cdot(\dots)\sim F_{L,l}$$

26) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{(k-1)\cdot q}\cdot\frac{1}{N_5}\cdot\sum_{\tau=1}^{k}n_\tau\left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau)}-\bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right)^{!}\cdot\left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau)}-\bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right)\sim F_{L,l}$$

27) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{\sum_{i=1}^{s}q_i\cdot(a_i-1)}\cdot\frac{1}{N_5}\cdot\sum_{j=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{a_j}n_{\tau j}\left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau,j)}-\bar{x}_{(1)}^{(tot)j}\right)^{!}\cdot\left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau,j)}-\bar{x}_{(1)}^{(tot)j}\right)\sim F_{L,l}$$

28) $$\frac{p\cdot(n-1)}{1}\cdot\frac{1}{N_2}\cdot\frac{n\cdot\left(\sum_{j=1}^{p}a_j\bar{x}_{j\cdot}-b\right)^2}{\sum_{j=1}^{p}a_j^2}\sim F_{1,\,p\cdot(n-1)}$$

29) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{k}\cdot\frac{1}{N_5}\sum_{\tau=1}^{k}\left\{\frac{n_\tau}{\sum_{i=1}^{p_\tau}a_{i\tau}^2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p_\tau}a_{i\tau}\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-b_\tau\right)^2\right\}\sim F_{L,l}$$

30) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{\sum_{\tau=1}^{k}\frac{a_\tau^2}{n_\tau}}\cdot\frac{1}{N_9}\cdot\left(\sum_{\tau=1}^{k}a_\tau\bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)}-b\right)^2\sim F_{1,\,\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}$$

31) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k}p\cdot(n_\tau-1)}{p}\cdot\frac{1}{N_4}\cdot\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\sum_{\tau=1}^{k}a_{i\tau}\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-b_i\right)^2}{\sum_{\tau=1}^{k}\frac{a_{i\tau}^2}{n_\tau}}\sim F_{p,\,p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}$$

32) $$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{q}\cdot\frac{1}{N_4}\cdot\sum_{i=1}^{q}\frac{\left(\sum_{\tau=1}^{k}a_{i\tau}\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}-b_i\right)^2}{\sum_{\tau=1}^{k}\frac{a_{i\tau}^2}{n_\tau}}\sim F_{q,\,p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}$$

33) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{q} \cdot \frac{1}{N_5} \cdot \sum_{i=1}^{q} \frac{\left(\sum_{\tau=1}^{k} a_{i\tau} \bar{x}_{j\cdot}^{(\tau)} - b_i\right)^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \frac{a_{i\tau}^2}{n_\tau}} \sim F_{q,\ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

34) $$\frac{p \cdot (n-1)}{\alpha} \cdot \frac{1}{N_2} \cdot n \cdot (A'\bar{x} - b)' \cdot (A'A)^{-1} \cdot (A'\bar{x} - b) \sim F_{\alpha,\ p\cdot(n-1)}$$

35) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} \alpha_\tau} \cdot \frac{1}{N_5} \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (A_\tau' \bar{x}_\tau - b_\tau)' \cdot (A_\tau' A_\tau)^{-1} \cdot (A_\tau' \bar{x}_\tau - b_\tau) \sim F_{L,\ell}$$

36) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{\alpha} \cdot \frac{1}{N_9} \cdot (A'\bar{y}_1 - b)' \cdot \left\{ A' \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{pmatrix} \cdot A \right\}^{-1} \cdot (A'\bar{y}_1 - b) \sim F_{L,\ell}$$

37) $$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i} \cdot \frac{1}{N_4} \cdot \sum_{i=1}^{p} (A_i'\bar{y}_i - b_i)' \cdot \left\{ A_i' \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{pmatrix} \cdot A_i \right\}^{-1} \cdot (A_i'\bar{y}_i - b_i) \sim F_{L,\ell}$$

38) $$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i} \cdot \frac{1}{N_5} \cdot \sum_{i=1}^{q} (A_i'\bar{y}_i - b_i)' \cdot \left\{ A_i' \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{pmatrix} \cdot A_i \right\}^{-1} \cdot (A_i'\bar{y}_i - b_i) \sim F_{L,\ell}$$

41. PRÜFUNG ANGENOMMENER ERWARTUNGSWERTE

411. 1 Stichprobe.

4111. Einfache Normalverteilung.

H_0: $\mu = \mu^*$, wobei μ^* fest vorgegeben ist.

Da die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig und identisch

$$x_i \sim N_1(\mu; \sigma^2)$$

verteilt sind, sind bekanntlich

$$\bar{x} \sim N_1(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$$

und

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

unabhängig verteilt. Ferner ist

$$\bar{x} - \mu^* \sim N_1(\mu - \mu^*; \frac{\sigma^2}{n}) \quad ,$$

also

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{x} - \mu^*) \sim N_1 \left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\mu - \mu^*) ; 1 \right]$$

und somit

$$\frac{n}{\sigma^2} (\bar{x} - \mu^*)^2 \sim \chi'^2 (1 ; \lambda) \quad ,$$

also unabhängig von

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2 (n-1)$$

verteilt. Somit (7) ist

$$(n-1) \cdot \frac{n \cdot (\bar{x} - \mu^*)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sim F'(1, n-1 ; \lambda)$$

verteilt.

$$\lambda = \frac{n}{2\sigma^2} (\mu - \mu^*)^2$$

ist genau dann gleich Null, wenn

$$\mu = \mu^*$$

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0: \mu = \mu^*$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{(n-1)\cdot n \cdot (\bar{x} - \mu^*)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sim F_{1,n-1}$$

verteilt ist. Hierbei handelt es sich nur um eine andere Form des geläufigen

t- Tests

$$\frac{\bar{x} - \mu^*}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t\,(n-1) \quad ,$$

wenn man beachtet, daß

$$t^2\,(n-1) \sim F_{1,n-1}$$

verteilt ist.

4112. Mehrfache Normalverteilung.

41121. Alle Erwartungswerte.

$H_0: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_1 \\ \vdots \\ \mu^*_p \end{pmatrix}$, wobei die μ^*_i fest vorgegeben sind.

Die $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ sind nach Voraussetzung unabhängig und identisch

$$\mathfrak{x}_i \sim N_p(\mu; \sigma^2 I)$$

verteilt, also ist

$$\bar{\mathfrak{x}} \sim N_p\,(\mu; \frac{\sigma^2}{n} I)$$

und somit

$$(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*) \sim N_p\,(\mu - \mu^*; \frac{\sigma^2}{n} \cdot I) \quad ,$$

also (17)

$$\frac{n}{\sigma^2}\,(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*)'(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*) \sim \chi'^2\,(p;\,\lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{n}{2\sigma^2}\,(\mu - \mu^*)'(\mu - \mu^*)$$

Da die Komponenten der $\mathfrak{x}_k$ nach Voraussetzung unabhängig verteilt sind, sind

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n}(x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(x_{k\nu} - \bar{x}_{k\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

für $i \neq k$ unabhängig verteilt. Deshalb (6) ist

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\sum_{\nu=1}^{n}(x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\,[p\cdot(n-1)\,]$$

verteilt. Bekanntlich sind

$$\bar{x}_{i\cdot} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\nu=1}^{n}(x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2$$

unabhängig verteilt. Weil die Komponenten der $\mathfrak{x}_T$ unabhängig verteilt sind,

sind für $i \neq k$

$$\bar{x}_{i\cdot} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\nu=1}^{n}(x_{k\nu} - \bar{x}_{k\cdot})^2$$

ebenfalls unabhängig verteilt. Somit sind

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2[p\cdot(n-1)\,]$$

und

$$\frac{n}{\sigma^2}\cdot(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*)'(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*) \sim \chi'^2(p;\,\lambda)$$

unabhängig verteilt. Deshalb (7) ist

$$\frac{p\cdot(n-1)}{p}\cdot\frac{n\cdot(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*)'\cdot(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*)}{\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n}(x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F'[p,p\cdot(n-1);\,\lambda\,]$$

verteilt. λ ist genau dann gleich Null, wenn

$$\mu = \mu^*$$

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_p^* \end{vmatrix}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*)'(\bar{\mathfrak{x}} - \mu^*)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n} (x_{iv} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F_{p,p\cdot(n-1)}$$

verteilt ist.

41122. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_q^* \end{vmatrix}, \text{ wobei } \begin{vmatrix} \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{vmatrix} \text{ außer acht bleibt.}$$

Setzt man

$$\mu_{(1)} = {}_{Def} \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{vmatrix}, \quad \mu^*_{(1)} = \begin{vmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_q^* \end{vmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{x}}_{(1)} = {}_{Def} \begin{vmatrix} \bar{x}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \bar{x}_{q\cdot} \end{vmatrix}$$

so ist

$$\frac{n}{\sigma^2} (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)} - \mu^*_{(1)})'(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)} - \mu^*_{(1)}) \sim \chi'^2(q; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{n}{2\sigma^2} (\mu_{(1)} - \mu^*_{(1)})'(\mu_{(1)} - \mu^*_{(1)})$$

ist, und zwar unabhängig von

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n} (x_{iv} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 [\, p \cdot (n-1) \,]$$

Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot (n-1)}{q} \cdot \frac{n \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)} - \mu^*_{(1)})'(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)} - \mu^*_{(1)})}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n} (x_{iv} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F'[q, p\cdot(n-1); \lambda]$$

verteilt. λ ist genau dann gleich Null, wenn

$$\mu_{(1)} = \mu^*_{(1)}$$

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu^*_1 \\ \vdots \\ \mu^*_q \end{vmatrix}, \text{ wobei } \begin{vmatrix} \mu_{q+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{vmatrix} \text{ außer acht bleibt,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot (n-1)}{q} \cdot \frac{n \cdot (\bar{\mu}_{(1)} - \mu^*_{(1)})'(\bar{\mu}_{(1)} - \mu^*_{(1)})}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F_{q,\, p\cdot(n-1)}$$

verteilt ist.

412. $k \geq 2$ Stichproben

4121. Einfache Normalverteilungen.

H_0: $\mu_1 = \mu^*_1, \mu_2 = \mu^*_2, \ldots, \mu_k = \mu^*_k$,

wobei die μ^*_i fest vorgegeben sind.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 41221.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $\mu_1 = \mu^*_1, \mu_2 = \mu^*_2, \ldots, \mu_k = \mu^*_k$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{k} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}_{\tau\cdot} - \mu^*_\tau)^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{\tau\nu} - \bar{x}_{\tau\cdot})^2} \sim F_{k,\, \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist; die $x_{\tau\nu}$ sind die Werte der τ- ten Stichprobe.

4122. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

41221. Alle Erwartungswerte.

$$H_0: \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{pk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{pk} \end{pmatrix}$$

Wie bereits bewiesen wurde, sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_T} (x^{(\tau)}_{iv} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2[p \cdot (n_\tau - 1)]$$

und

$$\frac{n_\tau}{\sigma^2} (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*}) \sim \chi'^2(p; \lambda_\tau)$$

unabhängig verteilt ; dabei ist

$$\lambda_\tau = \frac{n_\tau}{2\sigma^2} (\mu^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})' (\mu^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})$$

Wegen der Unabhängigkeit der Stichproben und wegen (6) sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_T} (x^{(\tau)}_{iv} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 [p \cdot (n_\tau - 1)]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*}) \sim \chi'^2 [k \cdot p ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{k \cdot p} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_T} (x^{(\tau)}_{iv} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2}$$

$$\sim F' [k \cdot p , p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1) ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau]$$

verteilt. Es ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k ,$$

und weil alle $\lambda_i \geqslant 0$ sind, ist λ genau dann gleich Null, wenn

alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \left| \begin{matrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{p1} \end{matrix} \right|, \ldots, \left| \begin{matrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{pk} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{pk} \end{matrix} \right|$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{k} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})' \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x^{(\tau)}_{i\nu} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2} \sim F_{k \cdot p, p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

41222. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0: \left| \begin{matrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 1} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_1 1} \end{matrix} \right|, \ldots, \left| \begin{matrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_k k} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_k k} \end{matrix} \right|$$

wobei die restlichen μ_ρ außer acht bleiben:

Wie bereits bewiesen, sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x^{(\tau)}_{i\nu} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 [p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})' \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)}) \sim \chi'^2 (\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau)$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})' (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}{}^{(\tau)} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2}$$

$$\sim F' [\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau, p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1) ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau]$$

verteilt. Es ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$$

und dabei sind alle $\lambda_i \geqslant 0$, also ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn unsere Nullhypothese gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \left| \begin{matrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 1} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{\cdot 11} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_1 1} \end{matrix} \right|, \ldots, \left| \begin{matrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_k k} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{\cdot 1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_k k} \end{matrix} \right|$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})' (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x^{(\tau)}_{i\nu} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2} \sim F^{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau, p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

4123. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

41231. Alle Erwartungswerte.

$$H_0: \left| \begin{matrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p_1 1} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{\cdot 11} \\ \vdots \\ \mu^*_{p_1 1} \end{matrix} \right|, \ldots, \left| \begin{matrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{p_k, k} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{\cdot 1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{p_k, k} \end{matrix} \right|$$

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 41232.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \left| \begin{matrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p_1, 1} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{\cdot 11} \\ \vdots \\ \mu^*_{p_1 1} \end{matrix} \right|, \ldots, \left| \begin{matrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{p_k, k} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mu^*_{\cdot 1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{p_k, k} \end{matrix} \right|$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau (\bar{\varphi}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})' \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)} - \mu^{(\tau)*})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x^{(\tau)}_{i\nu} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2} \sim F \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)$$

verteilt ist.

41232. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_{i_1 1} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu^*_{i_1 1} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_1 1} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} \mu_{i_k k} \\ \vdots \\ \mu_{q_k k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu^*_{i_k k} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_k k} \end{vmatrix}$$

wobei die restlichen $\mu_{\nu\rho}$ außer acht bleiben.

Wie bereits gezeigt, sind

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x^{(\tau)}_{i\nu} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1) \right]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^*_{(1)})' \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^*_{(1)}) \sim \chi'^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})' (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x^{(\tau)}_{i\nu} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2}$$

$$\sim F' \left[\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1) ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right]$$

verteilt. Da

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$$

und alle $\lambda_i \geqslant 0$ sind, ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, d.h. wenn unsere Nullhypothese gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu^*_{11} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_1 1} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_k k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu^*_{1k} \\ \vdots \\ \mu^*_{q_k k} \end{vmatrix}$$

wobei die restlichen $\mu_{r\rho}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})' \cdot (\bar{\varphi}^{(\tau)}_{(1)} - \mu^{(\tau)*}_{(1)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}^{(\tau)}_{i\cdot})^2}$$

$$\sim F_{\sum_{\tau=1}^{k} q_\tau, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

42. VERGLEICH UNBEKANNTER ERWARTUNGSWERTE .

421. Vergleich innerhalb der Stichproben.

4211. 1 Stichprobe.

42111. Alle Erwartungswerte.

$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 42112.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot (n-1)}{p-1} \cdot \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F_{p-1, p\cdot(n-1)}$$

verteilt ist.

42112. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$H_0: \quad \mu_1 = \ldots = \mu_q$, wobei die restlichen μ_ν außer acht bleiben.

Die Komponenten von $\mathfrak{x}_1$ mögen, wie üblich, folgendermaßen bezeichnet werden

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{vmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{p1} \end{vmatrix} \; ; \begin{vmatrix} x_{11}, \dots, x_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_{q1}, \dots, x_{qn} \end{vmatrix}$$

Den Gesamtmittelwert des obigen Blockes bezeichnen wir mit $\bar{x}^*_{..}$.

Weitere Bezeichnungen seien

$$\mathfrak{x}_{(1)_1} = \begin{vmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{q1} \end{vmatrix}, \bar{\mathfrak{x}}_{(1)} = \begin{vmatrix} \bar{x}_{1\cdot} \\ \vdots \\ \bar{x}_{q\cdot} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad E = \begin{vmatrix} 1, \dots, 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ 1, \dots, 1 \end{vmatrix}$$

Dann gelten

$$\sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}^*_{..})^2 = \frac{1}{q^2} \sum_{\nu=1}^{q} [q \cdot \bar{x}_{\nu\cdot} - (\bar{x}_{1\cdot} + \dots + \bar{x}_{q\cdot})]^2$$

$$= \frac{1}{q^2} \sum_{\nu=1}^{q} [\bar{x}_{1\cdot} + \dots + (1-q)\bar{x}_{\nu\cdot} + \dots + \bar{x}_{q\cdot}]^2$$

$$= \frac{1}{q^2} \sum_{\nu=1}^{q} \bar{\mathfrak{x}}'_{(1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1-q \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} (1, \dots, 1-q, \dots, 1) \cdot \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}$$

$$= \frac{1}{q^2} \sum_{\nu=1}^{q} \bar{\mathfrak{x}}'_{(1)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1-q & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1-q & \dots & (1-q)^2 & \dots & (1-q) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1-q & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}$$

$$= \frac{1}{q^2} \bar{\mathfrak{x}}'_{(1)} \sum_{\nu=1}^{q} \left[E + \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ -q, \dots, & -q, \dots, & -q \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} + q(q-1) \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \right] \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}$$

Es ist $$\sum_{\nu=1}^{q} \begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & \vdots & 0 \\ 1 \dots & 1 & \dots 1 \\ 0 & \vdots & 0 \\ & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot E - I$$

also

$$q^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu} .- \bar{x}_{..}^{*})^2 = \bar{\mathfrak{x}}'_{(1)} \cdot \left[q \cdot E - q[2E - 1] + q(q-1)\,1 \right] \cdot \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}$$

$$= \bar{\mathfrak{x}}'_{(1)} (q^2 1 - qE) \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}$$

Da

$$\bar{\mathfrak{x}}_{(1)} = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1) \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_{(1)n} \end{vmatrix}$$

ist, gilt

$$n^2 \cdot q \cdot \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu} .- \bar{x}_{..}^{*})^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_{(1)n} \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix} (q\,1 - E) \cdot (1, \ldots, 1) \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_{(1)n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_{(1)n} \end{vmatrix}' \cdot \left[q \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & \ldots & E \\ \vdots & & \vdots \\ E & \ldots & E \end{vmatrix} \right] \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_{(1)n} \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{(1)1} \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_{(1)n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{x}_n \end{vmatrix}$$

Beachtet man noch, daß die folgenden Relationen gelten

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, \ldots, 1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ 1, \ldots, 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & \ldots & (1,0) \\ \vdots & & \vdots \\ (1,0) & \ldots & (1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E & \ldots & E \\ \vdots & & \vdots \\ E & \ldots & E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (1,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1,0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (E\,0) & \dots & (E\,0) \\ \vdots & & \vdots \\ (E\,0) & \dots & (E\,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

so ergibt sich

$$n^2 \cdot q \cdot \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}^{*}_{\cdot\cdot})^2 = (\mathfrak{y}'_1, \dots, \mathfrak{y}'_n) \cdot A \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{y}_n \end{vmatrix}$$

wobei

$$A = q \cdot \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

Hier sind die Voraussetzungen zu (14) erfüllt, wenn wir nachweisen können,

daß

$$(\varkappa A)^2 = \varkappa A$$

mit einem geeigneten Zahlenfaktor $\varkappa$ gilt. Es ist

$$A^2 = q^2 \cdot n \cdot \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} - q \cdot n \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$- q \cdot n \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} + q \cdot n \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= q \cdot n \left[q \cdot \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \right]$$

Also ist

$$\left(\frac{A}{q \cdot n} \right)^2 = \frac{A}{q \cdot n}$$

Somit (14) ist

$$\frac{n}{\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{*})^2 \sim \chi'^2 (r ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$r = \text{Rang} \left(\frac{A}{q \cdot n} \right)$$

und

$$\lambda = \frac{n}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{q} (\mu_\nu - \bar{\mu}^{*})^2$$

Es ist der Rang einer idempotenten Matrix gleich ihrer Spur, also

$$r = \text{Spur} \frac{A}{q \cdot n} = n \cdot \frac{1}{q \cdot n} \text{Spur} (q\,I - E)_{q,q} = q \cdot n \cdot \frac{1}{q \cdot n} \cdot (q-1) = q-1$$

Bekanntlich ist $\bar{x}_{\nu\cdot}$ unabhängig von $\sum_{i=1}^{n} (x_{\nu i} - \bar{x}_{\nu\cdot})^2$ verteilt. Und da die Komponenten der $\mathfrak{X}_i$ nach Voraussetzung unabhängig verteilt sind, sind für $i \neq k$ auch $\bar{x}_{i\cdot}$ und $\sum_{\nu=1}^{n} (x_{k\nu} - \bar{x}_{k\cdot})^2$ unabhängig verteilt.

Wegen

$$\bar{x}_{\cdot\cdot}^{*} = \frac{\bar{x}_{1\cdot} + \bar{x}_{2\cdot} + \ldots + \bar{x}_{q\cdot}}{q}$$

sind deshalb

$$\frac{n}{\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{*})^2 \sim \chi'^2 (q-1 ; \lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 [\, p \cdot (n-1) \,]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot (n-1)}{q-1} \cdot \frac{n \cdot \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{*})^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F' [\, q-1, p \cdot (n-1) ; \lambda \,]$$

verteilt. Wann ist $\lambda = 0$?

Sei erstens $\lambda = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \bar{\mu}^* \\ &\vdots \\ \mu_q &= \bar{\mu}^* \quad , \end{aligned}$$

also

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$$

Sei zweitens

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$$

Daraus folgt

$$\bar{\mu}^* = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_q}{q} = \frac{q \cdot \mu_i}{q} = \mu_i \quad , \; i = 1, \dots, q \; .$$

Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$$

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_q$, wobei die restlichen μ_ν außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot (n-1)}{q-1} \cdot \frac{n \cdot \sum_{\nu=1}^{q} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^*)^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F_{q-1,\, p\cdot(n-1)}$$

verteilt ist.

42113. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{q1}$

$$\begin{aligned} \mu_{q_1+1} &= \mu_{q_1+2} = \dots = \mu_{q_2} \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mu_{q_{k-1}+1} &= \mu_{q_{k-1}+2} = \dots = \mu_{q_k} \quad , \end{aligned}$$

wobei die restlichen μ_ν außer acht bleiben.

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{n}{\sigma^2} \sum_{\nu=q_{T-1}+1}^{q_T} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(T)*})^2 \sim \chi'^2 [\, q_T - q_{T-1} - 1 \,;\, \lambda_T \,] \,, \quad \chi_T =_{def} q_T - q_{T-1}$$

verteilt ist. Da die Komponenten von $\mathcal{Y}_1$ unabhängig verteilt sind, ist (6)

$$\frac{n}{\sigma^2} \sum_{T=1}^{k} \sum_{\nu=q_{T-1}+1}^{q_T} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(T)*})^2 \sim \chi'^2 [\, (q_k - q_{k-1}) + \dots + q_1 - k \,;\, \sum_{T=1}^{k} \lambda_T \,]$$

$$\sim \chi'^2 (q_k - k \,;\, \sum_{T=1}^{k} \lambda_T)$$

verteilt, und zwar wiederum unabhängig von

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 [\, p \cdot (n-1) \,]$$

Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot (n-1)}{\sum_{T=1}^{k} (\chi_T - 1)} \cdot \frac{n \cdot \sum_{T=1}^{k} \sum_{\nu \in T \text{ fem. block}} (\bar{x}_{\nu\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(T)*})^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F' [\, \sum_{T=1}^{k} (\chi_T - 1), \, p \cdot (n-1); \sum_{T=1}^{k} \lambda_T \,]$$

verteilt. Wann ist $\lambda = 0$? Es ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$$

mit lauter nicht-negativen λ_i . Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{q_1}$

$$\begin{array}{ccccc} \mu_{q_1+1} & = & \mu_{q_1+2} & = \cdots = & \mu_{q_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu_{q+1_{k-1}} & = & \mu_{q+2_{k-1}} & = \cdots = & \mu_{q_k} \end{array}$$

wobei die restlichen μ_ν außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot (n-1)}{\sum_{\tau=1}^{k} (x_\tau - 1)} \cdot \frac{n \cdot \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu \in T \text{ bem. Block}} (\bar{x}_{\nu\,\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\,\cdot})^2} \sim F_{\sum_{\tau=1}^{k} (x_\tau - 1),\; p \cdot (n-1)}$$

verteilt ist.

4212. $k \geqslant 2$ Stichproben.

42121. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

421211. Alle Erwartungswerte.

Wegen der Unabhängigkeit der Stichproben sind (6)

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_{i\,\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi'^2 \left[k \cdot (p-1);\; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\,\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1) \right]$$

verteilt, und zwar unabhängig. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1)}{k \cdot (p-1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_{i\,\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\,\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F' \left[k \cdot (p-1),\; \sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1);\; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right]$$

verteilt. Es ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$$

mit lauter nicht-negativen λ_i . Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn alle

$\lambda_1 = 0$, also genau dann, wenn die Nullhypothese

$$H_0 : \quad \mu_{11} = \mu_{21} = \dots = \mu_{p1}$$

$$\mu_{12} = \mu_{22} = \dots = \mu_{p2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\mu_{1k} = \mu_{2k} = \dots = \mu_{pk}$$

gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \quad \mu_{11} = \mu_{21} = \dots = \mu_{p1}$$

$$\mu_{12} = \mu_{22} = \dots = \mu_{p2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\mu_{1k} = \mu_{2k} = \dots = \mu_{pk}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1}{k \cdot (p-1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{p} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{k\cdot(p-1),\ \sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

421212. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0 : \quad \mu_{11} = \mu_{21} = \dots = \mu_{q_1 1}$$

$$\mu_{12} = \mu_{22} = \dots = \mu_{q_2 2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\mu_{1k} = \mu_{2k} = \dots = \mu_{q_k k} \quad ,$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

Wegen der Unabhängigkeit der Stichproben sind (6)

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{q_\tau} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2 \sim \chi'^2 \left(\sum_{\tau=1}^{k} (q_\tau - 1) ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1) \right]$$

unabhängig verteilt. Folglich (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} (q_\tau - 1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{q_\tau} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F' \left[\sum_{\tau=1}^{k} (q_\tau - 1), \sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1), \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right]$$

verteilt. Da alle $\lambda_i \geq 0$ sind, ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn unsere Nullhypothese gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \mu_{11} = \mu_{21} = \ldots = \mu_{q_1 1}$$

$$\mu_{12} = \mu_{22} = \ldots = \mu_{q_2 2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\mu_{1k} = \mu_{2k} = \ldots = \mu_{q_k k} \quad ,$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} (q_\tau - 1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{q_\tau} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F \sum_{\tau=1}^{k} (q_\tau - 1), \sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1)$$

verteilt ist.

421213. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0: \quad \mu_{11} = \ldots = \mu_{q_1(1),1} \; ; \quad \ldots \quad ; \quad \mu_{1k} = \ldots = \mu_{q_1(k),k}$$

$$\begin{array}{llll}
\mu_{q_1^{(1)}+1,1} = \dots = \mu_{q_2^{(1)},1} & ; \dots ; & \mu_{q_1^{(k)}+1,k} = \dots = \mu_{q_2^{(k)},k} \\
\vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mu_{q_{a_1-1}^{(1)}+1,1} = \dots = \mu_{q_{a_1}^{(1)},1} & ; \dots ; & \mu_{q_{a_k-1}^{(k)}+1,k} = \dots = \mu_{q_{a_k}^{(k)},k}
\end{array}$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

Wegen der Unabhängigkeit der Stichproben sind (6)

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{v=1}^{a_\tau} \sum_{i \in v \text{ tem Block}} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)(v)})^2 \sim \chi'^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{v=1}^{a_\tau} (\varkappa_v^{(\tau)} - 1) ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1) \right] ; \varkappa_v^{(\tau)} = q_v^{(\tau)} - q_{v-1}^{(\tau)}$$

unabhängig verteilt. Folglich (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{v=1}^{a_\tau} (\varkappa_v^{(\tau)} - 1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{v=1}^{a_\tau} \sum_{i \in v \text{ tem Block}} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)(v)})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F' \left[\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{v=1}^{a_\tau} (\varkappa_v^{(\tau)} - 1) ; \sum_{\tau=1}^{k} p(n_\tau - 1) ; \lambda \right]$$

verteilt. Da alle $\lambda_i \geqslant 0$ sind, ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \quad \mu_{11} = \dots = \mu_{q_1^{(1)},1} ; \dots ; \mu_{1k} = \dots = \mu_{q_1^{(k)},k}$$

$$\begin{array}{llll}
\mu_{q_1^{(1)}+1,1} = \dots = \mu_{q_2^{(1)},1} & ; \dots ; & \mu_{q_1^{(k)}+1,k} = \dots = \mu_{q_2^{(k)},k} \\
\vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mu_{q_{a_1-1}^{(1)}+1,1} = \dots = \mu_{q_{a_1}^{(1)},1} & ; \dots ; & \mu_{q_{a_k-1}^{(k)}+1,k} = \dots = \mu_{q_{a_k}^{(k)},k}
\end{array} ,$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p\cdot(n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{a_\tau}(\varkappa_\nu^{(\tau)}-1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{\nu=1}^{a_\tau}\sum_{i\in\nu\text{-tem Block}} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)}(\nu))^2}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F_{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{a_\tau}(\varkappa_\nu^{(\tau)}-1),\ \sum_{\tau=1}^{k} p(n_\tau-1)}$$

verteilt ist.

42122. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

421221. Alle Erwartungswerte.

In 42122 gilt alles wortwörtlich wie in 42121 ; man braucht nur p durch p_τ zu ersetzen.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \begin{aligned} \mu_{11} &= \dots = \mu_{p_1 1} \\ \mu_{12} &= \dots = \mu_{p_2 2} \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \mu_{1k} &= \dots = \mu_{p_k k} \end{aligned}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k}(p_\tau - 1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \sum_{i=1}^{p_\tau}(\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)})^2}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p_\tau}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{\sum_{\tau=1}^{k}(p_\tau-1),\ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau-1)}$$

verteilt ist.

421222. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \mu_{11} = \dots = \mu_{q_1 1}$$

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= \dots = \mu_{q_2 2} \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \mu_{1k} &= \dots = \mu_{q_k k} \end{aligned} ,$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} (q_\tau - 1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \sum_{i=1}^{q_\tau} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)*})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{\sum_{\tau=1}^{k}(q_\tau - 1),\ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

421223. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \mu_{11} = \dots = \mu_{q_1^{(1)},1}; \ \dots; \ \mu_{1k} = \dots = \mu_{q_1^{(k)},k}$$

$$\begin{aligned} \mu_{q_1^{(1)}+1,1} &= \dots = \mu_{q_2^{(1)},1}; \ \dots; \ \mu_{q_1^{(k)}+1,k} = \dots = \mu_{q_2^{(k)},k} \\ &\vdots \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ \mu_{q_{a_1-1}^{(1)}+1,1} &= \dots = \mu_{q_{a_1}^{(1)},1}; \ \dots; \ \mu_{q_{a_k-1}^{(k)}+1,k} = \dots = \mu_{q_{a_k}^{(k)},k} \end{aligned}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{v=1}^{a_\tau} (x_v^{(\tau)} - 1)} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \sum_{v=1}^{a_\tau} \sum_{i \in \text{v-tem. Block}} (\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot\cdot}^{(\tau)(v)})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{v=1}^{a_\tau}(x_v^{(\tau)} - 1),\ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

422. Vergleich zwischen den Stichproben.

4221. k = 2 Stichproben.

42211. Einfache Normalverteilungen.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 422121.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$(n_1 + n_2 - 2) \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{(\bar{x}_{\cdot}^{(1)} - \bar{x}_{\cdot}^{(2)})^2}{\sum_{\tau=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_\nu^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{1, n_1+n_2-2}$$

verteilt ist.

In 422121 wird gezeigt, daß

$$\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} (\bar{x}_{\cdot}^{(1)} - \bar{x}_{\cdot}^{(2)})^2 = \sum_{\tau=1}^{2} n_\tau (\bar{x}_{\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot}^{(tot)})^2$$

gilt. Deshalb läßt sich der Test auch so schreiben und in dieser Form sich auf mehrere Stichproben übertragen.

$$(n_1 + n_2 - 2) \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{2} n_\tau \cdot (\bar{x}_{\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot}^{(tot)})^2}{\sum_{\tau=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_\nu^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{1, n_1+n_2-2}$$

42212. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

422121. Alle Erwartungswerte.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 42213.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{vmatrix}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$(n_1 + n_2 - 2) \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{(\bar{\mathfrak{x}}^{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)})' (\bar{\mathfrak{x}}^{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)})}{\sum_{\tau=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{p, p \cdot (n_1+n_2-2)}$$

verteilt ist. Der Test läßt sich auch so schreiben

$$(n_1+n_2-2)\cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{2} n_\tau (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(tot)})'(\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(tot)})}{\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{p,p\cdot(n_1+n_2-2)}$$

Und in dieser Form läßt er sich auf mehrere Stichproben übertragen.

422122. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 42213.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix}, \text{ wobei die restlichen } \mu_{\alpha\beta} \text{ außer acht bleiben,}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p\cdot(n_1+n_2-2)}{q}\cdot \frac{\frac{n_1\cdot n_2}{(n_1+n_2)}[\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(2)}]'[\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(2)}]}{\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{q,p\cdot(n_1+n_2-2)}$$

verteilt ist. Der Test läßt sich auch folgendermaßen schreiben und in dieser Form auf mehrere Stichproben übertragen.

$$\frac{p\cdot(n_1+n_2-2)}{q}\cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{2} n_\tau \left[\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)}\right]'\left[\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)}\right]}{\sum_{\tau=1}^{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{q,p\cdot(n_1+n_2-2)}$$

42213. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

$$H_0 : \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix}, \text{ wobei die restlichen } \mu_{\alpha\beta} \text{ außer acht bleiben.}$$

Es sind

$$\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}_{(1)} \sim N_q \left[\mu^{(1)}_{(1)} ; \frac{\sigma^2}{n_1} \, I \right]$$

und

$$\bar{\mathfrak{x}}^{(2)}_{(1)} \sim N_q \left[\mu^{(2)}_{(1)} ; \frac{\sigma^2}{n_2} \, I \right]$$

verteilt, und zwar unabhängig, weil sie auf unabhängigen Stichproben beruhen. Somit (12) ist

$$\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)}_{(1)} \sim N_q \left[\mu^{(1)}_{(1)} - \mu^{(2)}_{(1)} \; ; \; \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \cdot I \right]$$

verteilt. Folglich (17) ist

$$\left(\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)}_{(1)} \right)' \frac{1}{\sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} I \cdot \left(\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)}_{(1)} \right) \sim \chi'^2(q ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{n_1 \cdot n_2}{2(n_1+n_2) \cdot \sigma^2} \left(\mu^{(1)}_{(1)} - \mu^{(2)}_{(1)} \right)' \cdot \left(\mu^{(1)}_{(1)} - \mu^{(2)}_{(1)} \right)$$

$$= \frac{n_1 \cdot n_2}{2(n_1+n_2) \cdot \sigma^2} \sum_{i=1}^{q} (\mu_{i1} - \mu_{i2})^2$$

Offensichtlich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist.

Wie bereits gezeigt wurde, ist jedes $\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}$ von jedem $\sum_{\rho=1}^{p_k} \sum_{\nu=1}^{n_k} (x^{(k)}_{\rho\nu} - \bar{x}^{(k)}_{\rho\cdot})^2$

unabhängig verteilt. Somit sind

$$\frac{n_1 \, n_2}{(n_1+n_2) \cdot \sigma^2} \left(\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)}_{(1)} \right)' \cdot \left(\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(2)}_{(1)} \right) \sim \chi'^2 (q ; \lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{2} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{\tau=1}^{2} p_\tau \cdot (n_\tau - 1) \right]$$

unabhängig verteilt. Dies [(7) , (8)] liefert den gesuchten

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0: \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix}$, wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{2} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{q} \cdot \frac{\frac{n_1 \cdot n_2}{(n_1+n_2)} \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)' \cdot \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)}{\sum_{\tau=1}^{2} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F_{q,\ \sum_{\tau=1}^{2} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist. Man kann den Test auf eine Form bringen, in der er sich auf mehrere Stichproben übertragen läßt.

Aus

$$\bar{x}_{(1)}^{(tot)} = \frac{n_1 \cdot \bar{x}_{(1)}^{(1)} + n_2 \cdot \bar{x}_{(1)}^{(2)}}{n_1 + n_2}$$

folgen

$$\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)} = \frac{(n_1 + n_2)\bar{x}_{(1)}^{(1)} - n_1 \bar{x}_{(1)}^{(1)} - n_2 \bar{x}_{(1)}^{(2)}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)$$

$$n_1 \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right)' \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right) = \frac{n_1 \cdot n_2^2}{(n_1+n_2)^2} \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)' \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)$$

$$n_2 \cdot \left(\bar{x}_{(1)}^{(2)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right)' \left(\bar{x}_{(1)}^{(2)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right) = \frac{n_1^2 \cdot n_2}{(n_1+n_2)^2} \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)' \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right),$$

also

$$\sum_{\tau=1}^{2} n_\tau \cdot \left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right)' \cdot \left(\bar{x}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)}\right) = \frac{n_1 \cdot n_2}{(n_1+n_2)} \cdot \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)' \left(\bar{x}_{(1)}^{(1)} - \bar{x}_{(1)}^{(2)}\right)$$

Folglich kann der Test auch so geschrieben werden.

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{2} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{q} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{2} n_\tau \cdot \left(\bar{x}^{(\tau)} - \bar{x}^{(tot)}\right)' \left(\bar{x}^{(\tau)} - \bar{x}^{(tot)}\right)}{\sum_{\tau=1}^{2} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{q,\ \sum_{\tau=1}^{2} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

4222. $k \geq 2$ Stichproben.

42221. Einfache Normalverteilungen.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 422222.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau - k}{k-1} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}_{\cdot}^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot}^{(tot)})^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_\nu^{(\tau)} - \bar{x}_{\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{k-1, \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau - k}$$

verteilt ist.

42222. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

422221. Alle Erwartungswerte.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 422222.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{p1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{p2} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{pk} \end{vmatrix}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau - k}{k-1} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}^{(tot)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F_{p \cdot (k-1),\ p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

422222. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0: \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{qk} \end{vmatrix},$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

Aufgrund von 422122 vermuten wir den folgenden Test.

$$\varkappa \quad \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{\cdot,\cdot}$$

Dazu zeigen wir, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)}) \sim \chi'^2(r; \lambda)$$

verteilt ist. Mit der Abkürzung

$$n \underset{Def}{=} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau$$

gelten

$$\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)} = \frac{1}{n} \left[n \cdot \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} \right]$$

$$= -\frac{1}{n} \left[n_1 \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)} + \ldots + (n_\tau - n) \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} + \ldots + n_k \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(k)} \right]$$

$$= -\frac{1}{n} (n_1 I, \ldots, (n_\tau - n) \cdot I, \ldots n_k I) \cdot \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(k)} \end{vmatrix}$$

Weiter setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{z}' \underset{Def}{=} (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(1)'}, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(k)'})$$

Dann gelten

$$n^2 \cdot (\bar{\mathfrak{k}}^{(T)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{k}}^{(tot)}_{(1)})' \cdot (\bar{\mathfrak{k}}^{(T)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{k}}^{(tot)}_{(1)}) = \mathfrak{z}' \cdot \begin{vmatrix} n_1 \mathfrak{l} \\ \vdots \\ (n_T - n) \cdot \mathfrak{l} \\ \vdots \\ n_k \cdot \mathfrak{l} \end{vmatrix} (n_1\mathfrak{l}, \ldots, (n_T - n)\mathfrak{l}, \ldots, n_k\mathfrak{l}) \cdot \mathfrak{z}$$

$$= \mathfrak{z}' \cdot \begin{vmatrix} n_1^2 \cdot \mathfrak{l} & \ldots & n_1 \cdot (n_T - n)\mathfrak{l} & \ldots & n_1 n_k \mathfrak{l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (n_T - n) n_1 \mathfrak{l} & \ldots & (n_T - n)^2 \mathfrak{l} & \ldots & (n_T - n) n_k \mathfrak{l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n_k n_1 \mathfrak{l} & \ldots & n_k \cdot (n_T - n)\mathfrak{l} & \ldots & n_k^2 \cdot \mathfrak{l} \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{z}$$

$$= \mathfrak{z}' \cdot \left[\begin{vmatrix} n_1 n_1 \mathfrak{l} & \ldots & n_1 n_k \mathfrak{l} \\ \vdots & & \vdots \\ n_k n_1 \mathfrak{l} & \ldots & n_k n_k \cdot \mathfrak{l} \end{vmatrix} - n \cdot \begin{vmatrix} 0 & n_1 \mathfrak{l} & 0 \\ n_1 \mathfrak{l} & \ldots & n_T \mathfrak{l} \quad \ldots \quad n_k \mathfrak{l} \\ 0 & n_k \mathfrak{l} & 0 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + n \cdot \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & (n - n_T)\mathfrak{l} & 0 \\ & 0 & \end{vmatrix} \right] \cdot \mathfrak{z}$$

$$n^2 \cdot n_T \cdot (\bar{\mathfrak{k}}^{(T)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{k}}^{(tot)}_{(1)})' \cdot (\bar{\mathfrak{k}}^{(T)}_{(1)} - \bar{\mathfrak{k}}^{(tot)}_{(1)})$$

$$= \mathfrak{z}' \cdot \left[n_T \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 \mathfrak{l} & \ldots & n_1 n_k \mathfrak{l} \\ \vdots & & \vdots \\ n_k n_1 \mathfrak{l} & \ldots & n_k n_k \mathfrak{l} \end{vmatrix} - n \cdot \begin{vmatrix} 0 & n_1 n_T \mathfrak{l} & 0 \\ n_1 n_T \mathfrak{l} & \ldots & n_T n_T \mathfrak{l} \quad \ldots \quad n_k n_T \mathfrak{l} \\ 0 & n_k n_T \mathfrak{l} & 0 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + n^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & n_T \mathfrak{l} & 0 \\ & 0 & \end{vmatrix} - n \cdot \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & n_T n_T \mathfrak{l} & 0 \\ & 0 & \end{vmatrix} \right] \cdot \mathfrak{z}$$

Es ist

$$\sum_{\tau=1}^{k} \begin{vmatrix} 0 & & n_1 n_\tau | & & 0 \\ & & \vdots & & \\ n_1 n_\tau | , \ldots , & n_\tau n_\tau | , \ldots , & n_k n_\tau | \\ & & \vdots & & \\ 0 & & n_k \cdot n_\tau | & & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} n_1 n_1 | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k n_k | \end{vmatrix}$$

Deshalb gilt

$$n^2 \cdot \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathcal{Y}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathcal{Y}}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathcal{Y}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathcal{Y}}_{(1)}^{(tot)})$$

$$= \mathfrak{z}' \cdot \left[n \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix} - 2n \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + n \cdot \begin{vmatrix} n_1^2 | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k^2 | \end{vmatrix} + n^2 \cdot \begin{vmatrix} n_1 | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k | \end{vmatrix} - n \cdot \begin{vmatrix} n_1^2 | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k^2 | \end{vmatrix} \right] \cdot \mathfrak{z}$$

$$= \mathfrak{z}' \cdot \left[n^2 \cdot \begin{vmatrix} n_1 | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k | \end{vmatrix} - n \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix} \right] \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{z}' \cdot A \cdot \mathfrak{z}$$

Es ist

$$\mathfrak{z} \sim N.. (\ldots ; D)$$

verteilt, wobei

$$D = \sigma^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} | \end{vmatrix} = {}_{Def}\ \sigma^2 \cdot D_1$$

Es bleibt nur noch

$$\frac{\alpha A}{\sigma^2} \cdot D \cdot \frac{\alpha A}{\sigma^2} = \frac{\alpha A}{\sigma^2}$$

zu zeigen. Es gelten

$$A \cdot D_1 = -n \cdot \begin{vmatrix} n_1 | , \ldots , n_1 | \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ n_k | , \ldots , n_k | \end{vmatrix} + n^2 \cdot \begin{vmatrix} | & 0 \\ & \ddots \\ 0 & | \end{vmatrix}$$

$$A \cdot D_1 \cdot A = n^2 \cdot n \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix} - n^3 \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix}$$

$$- n^3 \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | , \ldots , n_1 n_k | \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ n_k n_1 | , \ldots , n_k n_k | \end{vmatrix} + n^4 \cdot \begin{vmatrix} n_1 | & 0 \\ & \ddots \\ 0 & n_k | \end{vmatrix} = n^2 \cdot A$$

Also gilt

$$\left(\frac{1}{\sigma^2 n^2} A \right) \cdot D \cdot \left(\frac{1}{\sigma^2 \cdot n^2} \cdot A \right) = \frac{1}{\sigma^2 \cdot n^2} \cdot A$$

Somit ist (16)

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)}) \sim \chi'^2 (r ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\mu_{(1)}^{(\tau)} - \mu_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\mu_{(1)}^{(\tau)} - \mu_{(1)}^{(tot)})$$

und

r = Rang A

Bekanntlich ändert sich der Rang bei den folgenden Operationen nicht. Wir addieren alle Zeilen zur letzten.

$$r = \text{Rang} \left[\begin{vmatrix} -n \cdot \begin{vmatrix} n_1 n_1 | & , \ldots , & n_1 n_k | \\ \vdots & & \vdots \\ n_{k-1} n_1 | & , \ldots , & n_{k-1} n_k | \\ n\, n_1 | & , \ldots , & n\, n_k | \end{vmatrix} + n^2 \cdot \begin{vmatrix} n_1 | & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_{k-1} | \\ n_1 | , \ldots , & n_{k-1} | , & n_k | \end{vmatrix} \end{vmatrix} \right]$$

Wir dividieren alle Elemente durch n^2.

$$r = \text{Rang}\left[-\begin{vmatrix} \frac{n_1}{n} n_1 I & \dots & \frac{n_1}{n} n_k I \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{n_{k-1}}{n} n_1 I & \dots & \frac{n_{k-1}}{n} n_k I \\ n_1 I & \dots & n_k I \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_{k-1} I \\ n_1 I, \dots, & n_{k-1} I, & n_k I \end{vmatrix} \right]$$

$$= \text{Rang} \begin{vmatrix} n_1 I - \frac{n_1}{n} n_1 I & \dots & - \frac{n_1}{n} n_{k-1} I & , & - \frac{n_1}{n} n_k I \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ - \frac{n_{k-1}}{n} n_1 I & \dots & n_{k-1} I - \frac{n_{k-1}}{n} n_{k-1} I & , & - \frac{n_{k-1}}{n} n_k I \\ 0 & \dots & 0 & , & 0 \end{vmatrix}$$

$$\leqslant (k-1) \cdot q$$

Für $i = 1, 2, \dots, k-1$ dividieren wir die letzte Spalte durch n_k, multiplizieren mit $(-n_i)$ und addieren zur i-ten Spalte.

$$r = \text{Rang} \begin{vmatrix} n_1 I & & 0 & - \frac{n_1}{n} n_k I \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & n_{k-1} I & - \frac{n_{k-1}}{n} n_k I \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \geqslant (k-1) \cdot q$$

Also ist

$$r = (k-1) \cdot q$$

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)}) \sim \chi'^2 [(k-1) \cdot q ; \lambda$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_\tau} (x_{iv}^{(\tau)} - \bar{x}_{i.}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2 [p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)]$$

unabhängig verteilt sind. Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{(k-1) \cdot q} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{x}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{x}_{(1)}^{(tot)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F'[(k-1) \cdot q, p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1); \lambda]$$

verteilt. Es ist

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (\mu_{(1)}^{(\tau)} - \mu_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\mu_{(1)}^{(\tau)} - \mu_{(1)}^{(tot)})$$

Sei erstens

$$\mu_{(1)}^{(1)} = \mu_{(1)}^{(2)} = \dots = \mu_{(1)}^{(k)} ,$$

dann gilt

$$\mu_{(1)}^{(tot)} = \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot \mu_{(1)}^{(\tau)}}{n} = \frac{n \cdot \mu_{(1)}^{(1)}}{n} = \mu_{(1)}^{(1)} ; \; i = 1, \dots, k ,$$

also $\lambda = 0$

Sei zweitens $\lambda = 0$. Daraus folgt

$$\mu_i^{(1)} = \mu_{(1)}^{(tot)} ; \; i = 1, \dots, k ,$$

also

$$\mu_{(1)}^{(1)} = \mu_{(1)}^{(2)} = \dots = \mu_{(1)}^{(k)}$$

Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} \mu_{1q} \\ \vdots \\ \mu_{qk} \end{vmatrix} ,$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{(k-1)\cdot q}\cdot\frac{\sum_{\tau=1}^{k}n_\tau\cdot(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})'\cdot(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)}-\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}\sim F_{(k-1)\cdot q,\,p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}$$

verteilt ist.

422223. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

$$H_0:\begin{vmatrix}\mu_{11}\\ \vdots\\ \mu_{q_1 1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_{12}\\ \vdots\\ \mu_{q_1 2}\end{vmatrix}=\ldots=\begin{vmatrix}\mu_{1x_1}\\ \vdots\\ \mu_{q_1 x_1}\end{vmatrix};\ \ldots;\ \begin{vmatrix}\mu_{1x_{s-1}}\\ \vdots\\ \mu_{q_s x_s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_{1,x_s+1}\\ \vdots\\ \mu_{q_s,x_s+1}\end{vmatrix}=\ldots=\begin{vmatrix}\mu_{1k}\\ \vdots\\ \mu_{q_s k}\end{vmatrix}$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

Es wurde bereits gezeigt, daß

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\tau=1}^{s_1}n_{\tau 1}\,(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau,1)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_1)})'\cdot(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau,1)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_1)})\sim\chi'^2(q_1(q_1-1);\ \lambda_1)$$

verteilt ist, wobei

$$\lambda_1\geqslant 0\quad\text{und}\quad a_1=x_1-x_{1-1}+1$$

Da die Blöcke auf unabhängigen Stichproben beruhen, ist (6)

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{s_1}n_{\tau i}(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau,i)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_i)})'\cdot(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau,i)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_i)})\sim\chi'^2[\sum_{i=1}^{s}(a_i-1)q_i;\ \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\ ]$$

verteilt. Wiederum ist diese Prüfgröße von

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)}-\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2\sim\chi^2\,[\,p\cdot\sum_{\nu=1}^{k}(n_\nu-1)\,]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}{\sum_{i=1}^{s}q_i\cdot(a_i-1)}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{s_1}n_{\tau i}(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau,i)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_i)})'\cdot(\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau,i)}-\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_i)})}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)}-\bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}\sim F'[\sum_{i=1}^{s}q_i(a_i-1),\ p\cdot\sum_{\tau}(n_\tau-1);\ \lambda\ ]$$

verteilt. Wegen $\lambda_i \geqslant 0$ ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist.

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 2} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1 \varkappa_1} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 \varkappa_1} \end{vmatrix}; \ \ldots; \begin{vmatrix} \mu_{1 \varkappa_s} \\ \vdots \\ \mu_{1 \varkappa_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{1 \varkappa_s+1} \\ \vdots \\ \mu_{q_s \varkappa_s+1} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_s k} \end{vmatrix}$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot \sum_{T=1}^{k} (n_T - 1)}{\sum_{i=1}^{s} q_i \cdot (a_i - 1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{T=1}^{a_i} n_{Ti} (\bar{\varkappa}_{(i)}^{(T,i)} - \bar{\varkappa}_{(i)}^{(\mathrm{tot}_i)}) \cdot (\bar{\varkappa}_{(i)}^{(T,i)} - \bar{\varkappa}_{(i)}^{(\mathrm{tot}_i)})}{\sum_{T=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{v=1}^{n_T} (x_{iv}^{(T)} - x_{i\cdot}^{(T)})^2} \sim F_{\sum_{i=1}^{s} q_i \cdot (a_i - 1),\ p \cdot \sum_{T=1}^{k} (n_T - 1)}$$

verteilt ist.

42223. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

Hier gilt alles wortwörtlich wie bei 42222; man braucht nur p durch p_T zu ersetzen.

422231. Simultaner Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q2} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{qk} \end{vmatrix},$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben, gültig sei,

ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{(k-1)\cdot q} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{(k-1)\cdot q,\ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

422232. Partieller Vergleich nur einiger Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{vmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 2} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1 \varkappa_1} \\ \vdots \\ \mu_{q_1 \varkappa_1} \end{vmatrix};\ \ldots;\ \begin{vmatrix} \mu_{1 \varkappa_s} \\ \vdots \\ \mu_{q_s \varkappa_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{1, \varkappa_s + 1} \\ \vdots \\ \mu_{q_s, \varkappa_s + 1} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} \mu_{1k} \\ \vdots \\ \mu_{q_s k} \end{vmatrix}$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{i=1}^{s} q_i \cdot (a_i - 1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{\tau=1}^{s_i} n_{\tau i} (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau, i)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_i)})' \cdot (\bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(\tau, i)} - \bar{\mathfrak{x}}_{(1)}^{(tot_i)})}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{\sum_{i=1}^{s} q_i \cdot (a_i - 1),\ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist; hierbei ist $a_i = \varkappa_i - \varkappa_{i-1} + 1$.

43. LINEARE HYPOTHESEN

431. Prüfung angenommener Hypothesen

4311. Prüfung innerhalb der Stichproben

43111. 1 Stichprobe

$H_0: \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i = b$

Es ist

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_{i\cdot} - b \right) \sim N_1\left[\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i - b \right) ; \frac{\sigma^2}{n} \left(a_1^2 + \ldots + a_p^2 \right) \right]$$

verteilt. Folglich (17) ist

$$\frac{n}{\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{p} a_i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_{i\cdot} - b \right)^2 \sim \chi'^2(1 ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_{i} - b \right)^2}{2\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{p} a_i^2}$$

Bekanntlich ist jedes $\bar{x}_{i\cdot}$ von $\sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2$ unabhängig verteilt. Und wegen der Unabhängigkeit der Stichproben sind für $i \neq k$

$\bar{x}_{i\cdot}$ und $\sum_{\nu=1}^{n} (x_{k\nu} - \bar{x}_{k\cdot})^2$ ebenfalls unabhängig verteilt. Somit sind

$$\frac{n}{\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{p} a_i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_{i\cdot} - b \right)^2 \sim \chi'^2 (1 ; \lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 [p \cdot (n-1)]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$p \cdot (n-1) \cdot \frac{\frac{n}{\sum a_i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_{i\cdot} - b \right)^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F' [1, p \cdot (n-1) ; \lambda]$$

verteilt. Es ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \quad \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i = b$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot (n-1) \cdot n}{\sum_{i=1}^{p} a_i^2} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_{i\cdot} - b \right)^2}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F_{1,\, p \cdot (n-1)}$$

verteilt ist.

43112. $k \geqslant 2$ Stichproben.

$$H_0: \begin{array}{l} a_{11}\mu_{11} + \ldots + a_{p_1 1}\mu_{p_1 1} = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{1k}\mu_{1k} + \ldots + a_{p_k k}\mu_{p_k k} = b_k \end{array}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Stichproben (6) ist

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \frac{n_\tau}{\sum_{i=1}^{p\tau} a^2{}_{i\tau}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p\tau} a_{i\tau} \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - b_\tau \right)^2 \sim \chi'^2 \left(k ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau \right)$$

verteilt, und zwar unabhängig von

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p\tau} \sum_{\nu=1}^{n\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1) \right]$$

Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{k} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} \frac{n_\tau}{\sum_{i=1}^{p\tau} a^2{}_{i\tau}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p\tau} a_{i\tau} \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - b_\tau \right)^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p\tau} \sum_{\nu=1}^{n\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F' \left[k, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1) ; \lambda \right]$$

verteilt. Da alle $\lambda_i \geqslant 0$ sind, ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0 : \begin{matrix} a_{11}\mu_{11} + \ldots + a_{p_1 1}\mu_{p_1 1} = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{1k}\mu_{1k} + \ldots + a_{p_k k}\mu_{p_k k} = b_k \end{matrix}$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{k} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} \frac{n_\tau}{\sum_{i=1}^{p_\tau} a_{i\tau}^2} \left(\sum_{i=1}^{p_\tau} a_{i\tau} \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)} - b_\tau \right)^2}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{k, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

4312. Prüfung zwischen den Stichproben.

43121. Einfache Normalverteilungen.

$$H_0 : \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i = b$$

Die

$$\bar{x}_i \sim N_1(\mu_i ; \frac{\sigma^2}{n_i})$$

sind unabhängig verteilt, somit ist

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{x}_i - b) \sim N_1[(\sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i - b) ; \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{n_i}] ,$$

also (17)

$$\frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{x}_i - b)^2}{\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{n_i}} \sim \chi'^2 (1 ; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i - b)^2}{2\sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{n_i}}$$

Wiederum ist die χ'^2-verteilte Zufallsgröße von

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_v^{(i)} - \bar{x}_i)^2 \sim \chi^2 [\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}{\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{n_i}} \cdot \frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{x}_i - b)^2}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_v^{(i)} - \bar{x}_i)^2} \sim F'[1, \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) ; \lambda]$$

verteilt. Es ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i = b$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}{\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{n_i}} \cdot \frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{x}_i - b)^2}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_v^{(i)} - \bar{x}_i)^2} \sim F_{1, \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}$$

verteilt ist.

43122. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

431221. Alle Erwartungswerte.

$$H_0: \begin{array}{l} a_{11}\mu_{11} + \ldots + a_{1k}\mu_{1k} = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{p1}\mu_{p1} + \ldots + a_{pk}\mu_{pk} = b_p \end{array}$$

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 43123.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die obige Nullhypothese gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{k} a_{i\nu}\bar{x}_{i\cdot}^{(\nu)} - b_i\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{a_{i\nu}^2}{n_\nu}}}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}\left(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) \sim F_{p,p\cdot\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)}$$

verteilt ist.

431222. Nur einige Erwartungswerte, wobei die restlichen außer acht bleiben.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 43123.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \begin{array}{l} a_{11}\mu_{11} + \ldots + a_{1k}\mu_{1k} = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{q1}\mu_{q1} + \ldots + a_{qk}\mu_{qk} = b_q \end{array},$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau - 1)}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{k} a_{i\nu}\bar{x}_{i\cdot}^{(\nu)} - b_i\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{a_{i\nu}^2}{n_\nu}}}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}\left(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)}\right)^2} \sim F_{q,p\cdot\sum_{\tau=1}^{k}(n_\tau-1)}$$

verteilt ist.

43123. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

$$H_0: \begin{array}{l} a_{11}\mu_{11} + \ldots + a_{1k}\mu_{1k} = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{q1}\mu_{q1} + \ldots + a_{qk}\mu_{qk} = b_q \end{array},$$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

Da die Stichproben unabhängig verteilt sind, sind (6)

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{q}\frac{(\sum_{\nu=1}^{k} a_{i\nu}\bar{x}_{i\cdot}^{(\nu)} - b_i)^2}{\sum_{\nu=1}^{k}\frac{a_{i\nu}^2}{n_\nu}} \sim \chi'^2[q;\sum_{i=1}^{q}\lambda_i]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p_\tau}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2[\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau - 1)]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{q}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{(\sum_{\nu=1}^{k} a_{i\nu}\bar{x}_{i\cdot}^{(\nu)} - b_i)^2}{\sum_{\nu=1}^{k}\frac{a_{i\nu}^2}{n_\nu}}}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p_\tau}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F'[q, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau-1); \lambda]$$

verteilt. Da alle $\lambda_i \geqslant 0$ sind, ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_q$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0: a_{i1}\mu_{i1} + \ldots + a_{ik}\mu_{ik} = 0\ ;\ i = 1, \ldots, q$,

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau-1)}{q}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{q}\frac{(\sum_{\nu=1}^{k} a_{i\nu}\bar{x}_{i\cdot}^{(\nu)} - b_i)^2}{\sum_{\nu=1}^{k}\frac{a_{i\nu}^2}{n_\nu}}}{\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{i=1}^{p_\tau}\sum_{\nu=1}^{n_\tau}(x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2} \sim F_{q,\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau\cdot(n_\tau-1)}$$

verteilt ist.

432. Prüfung angenommener Systeme von linearen Hypothesen.

4321. Systeme innerhalb der Stichproben.

43211. 1 Stichprobe.

H_0: $A'\mu = b$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Zeilen von A als linear unabhängig angesehen werden; denn die linear abhängigen können weggelassen werden, da sie von selbst erfüllt sind, sobald die linear unabhängigen erfüllt sind. Ferner setzen wir voraus, daß das obige lineare Gleichungssystem lösbar ist. Diese Voraussetzungen sollen für alles Weitere gelten, ohne daß wir immer wieder darauf hinweisen.

Weil

$$\bar{\varphi} \sim N_p[\mu;\ \frac{\sigma^2}{n} \cdot 1\ ]$$

verteilt ist, ist (11)

$$A' \cdot \bar{\varphi} \sim N_\alpha [A'\mu;\ \frac{\sigma^2}{n}\ A'A\ ]$$

verteilt, wobei α die Anzahl der Zeilen der Matrix A bezeichnet.

Wegen $\alpha = \text{Rang } A = \text{Rang } A' = \text{Rang } A'A$

hat $A' \cdot A$ vollen Rang und ist somit invertierbar. Deshalb (17) ist

$$\frac{n}{\sigma^2}\ (A'\bar{\varphi} - b)' \cdot (A'A)^{-1} \cdot (A'\bar{\varphi} - b) \sim \chi'^2\ (\alpha;\ \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{n}{2\sigma^2}\ (A'\mu - b)' \cdot (A'A)^{-1} \cdot (A'\mu - b)$$

Da $A' \cdot A$ eigentlich positiv definit ist, gilt dasselbe auch von $(A'A)^{-1}$. Somit ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist. Nach denselben Schlüssen, die bisher immer wieder angewandt wurden, sieht man ein, daß die obige χ'^2 - verteilte Zufallsgröße von

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2 \sim \chi^2\ [\ p \cdot (n-1)\ ]$$

unabhängig verteilt ist. Somit (7) ist

$$\frac{p \cdot (n-1)}{\alpha} \cdot \frac{n \cdot (A'\bar{\varphi} - b)' \cdot (A'A)^{-1} \cdot (A'\bar{\varphi} - b)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F'[\alpha, p \cdot (n-1); \lambda]$$

verteilt. Da $\lambda = 0$ genau dann, wenn H_0 gültig ist, liefert (8) den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0: A'\mu = b$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot (n-1)}{\alpha} \cdot \frac{n \cdot (A'\bar{\varphi} - b)' \cdot (A'A)^{-1} \cdot (A'\bar{\varphi} - b)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{i\nu} - \bar{x}_{i\cdot})^2} \sim F_{\alpha,\, p \cdot (n-1)}$$

verteilt ist.

43212. $k \geqslant 2$ Stichproben.

$H_0: \quad A'_1\mu_1 = b_1, \ \ldots, \ A'_k\mu_k = b_k$

Wegen der Unabhängigkeit der Stichproben sind (6)

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (A'_\tau \bar{\varphi}_\tau - b_\tau)' \cdot (A'_\tau \cdot A_\tau)^{-1} \cdot (A'_\tau \bar{\varphi}_\tau - b_\tau) \sim \chi'^2[\sum_{\tau=1}^{k} \alpha_\tau ; \sum_{\tau=1}^{k} \lambda_\tau]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2[\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} \alpha_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (A'_\tau \bar{\varphi}_\tau - b_\tau)' \cdot (A'_\tau A_\tau)^{-1} \cdot (A'_\tau \bar{\varphi}_\tau - b_\tau)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F'[\sum_{\tau=1}^{k} \alpha_\tau, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1); \lambda]$$

verteilt. Da alle $\lambda_i \geqslant 0$ sind, ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$$H_0: \quad A'_1\mu_1 = b_1, \ \ldots, \ A'_k\mu_k = b_k$$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{\tau=1}^{k} \alpha_\tau} \cdot \frac{\sum_{\tau=1}^{k} n_\tau \cdot (A'_\tau \bar{\varphi}_\tau - b_\tau)'(A'_\tau A_\tau)^{-1}(A'_\tau \bar{\varphi}_\tau - b_\tau)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_i^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F_{\sum_{\tau=1}^{k} \alpha_\tau, \ \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

4322. Systeme zwischen den Stichproben.

43221. Einfache Normalverteilungen.

$$H_0: \qquad A'_1\mu_1 = b_1 \quad ,$$

wobei

$$\mu'_1 = {}_{Def}(\mu_{(1)}, \ \ldots, \ \mu_{(k)})$$

gesetzt wurde. Die $\bar{x}_i$ sind unabhängig normal verteilt.

$$\bar{x}_i \sim N\left(\mu_{(i)}; \ \frac{\sigma^2}{n_i}\right)$$

Also ist

$$\bar{\mathfrak{z}}_1 = {}_{Def} \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{vmatrix} \sim N_k \left[\mu_{(1)}; \ \sigma^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \right]$$

verteilt, somit (11) ist

$$A'_1 \bar{\mathfrak{z}}_1 \sim N_\alpha \left[A'_1\mu_1; \ \sigma^2 \cdot A'_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_1 \right]$$

verteilt. Folglich (17) ist

$$\frac{1}{\sigma^2}(A'_1 \bar{z}_1 - b_1)' \left[A'_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} A_1 \right]^{-1} \cdot (A'_1 \bar{z}_1 - b_1) \sim \chi'^2(\alpha; \lambda)$$

verteilt, wobei

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(A'_1 \mu_1 - b_1)' \cdot \left[A'_1 \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} A_1 \right]^{-1} \cdot (A'_1 \mu_1 - b_1)$$

Es ist

$$A'_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_1 = A'_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{n_k}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{n_k}} \end{vmatrix} \cdot A_1 = B' \cdot B$$

wobei

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{n_k}} \end{vmatrix} \cdot A_1$$

Weil $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{n_k}} \end{vmatrix}$ eine nicht - singuläre Matrix ist, gilt

$$\text{Rang } B = \text{Rang } A_1$$

Somit hat B vollen Rang, also ist $B' \cdot B$ eigentlich positiv definit.

Somit ist auch $(B' \cdot B)^{-1}$, d.h.

$$\left[A'_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_1 \right]^{-1}$$

eigentlich positiv definit. Schon oft durchgeführte Überlegungen zeigen, daß

$$\frac{1}{\sigma^2}(A'_1 \bar{z}_1 - b_1)' \cdot \left[A'_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_1 \right]^{-1} \cdot (A'_1 \bar{z}_1 - b_1) \sim \chi'^2(\alpha; \lambda)$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_v^{(i)} - \bar{x}_i)^2 \sim \chi^2 \left[\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \right]$$

unabhängig verteilt sind. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}{\alpha} \cdot \frac{(A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)' \cdot \left[A_i' \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_i \right]^{-1} \cdot (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_v^{(i)} - \bar{x}_i)^2}$$

$$\sim F' \left[\alpha, \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) ; \lambda \right]$$

verteilt. Es ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn $A'_i \mu_i = b_i$. Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \quad A'_i \mu_i = b_i$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}{\alpha} \cdot \frac{(A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)' \cdot \left[A'_i \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_i \right]^{-1} \cdot (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{v=1}^{n_i} (x_v^{(i)} - \bar{x}_i)^2}$$

$$\sim F_{\alpha, \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)}$$

verteilt ist.

43222. Mehrfache Normalverteilungen gleicher Dimension.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall von 43223.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

$H_0 : \quad A'_1 \mu_1 = b_1 , \ \dots , \ A'_p \cdot \mu_p = b_p$

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1)}{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{p} (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)' \cdot \left[A'_i \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_i \right]^{-1} \cdot (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F \Big[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, , \, p \cdot \sum_{\tau=1}^{k} (n_\tau - 1) \Big]$$

verteilt ist.

43223. Mehrfache Normalverteilungen verschiedener Dimension.

Sei q die kleinste der k Dimensionen.

H_0: $A'_1 \mu_1 = b_1 \, , \ldots , A'_q \mu_q = b_q$,

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben.

Da die $\bar{\mathfrak{z}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{z}}_q$ unabhängig verteilt sind, sind aufgrund der schon oft durchgeführten Überlegungen

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{q} (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)' \cdot \left[A'_i \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_i \right]^{-1} \cdot (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i) \sim \chi'^2 \Big[\sum_{i=1}^{q} \alpha_i ; \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \Big]$$

und

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2 \sim \chi^2 \Big[\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1) \Big]$$

unabhängig verteilt. Somit (7) ist

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{q} (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)' \cdot \left[A'_i \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_i \right]^{-1} \cdot (A'_i \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F' \Big[\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, ; \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \Big]$$

verteilt. Da alle $\lambda_i \geq 0$ sind, ist

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 0$$

genau dann, wenn alle $\lambda_i = 0$, also genau dann, wenn H_0 gültig ist.

Dies (8) liefert den gesuchten Test.

Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Nullhypothese

H_0: $A_1' \mu_1 = b_1 , \ldots , A_q' \mu_q = b_q ,$

wobei die restlichen $\mu_{\alpha\beta}$ außer acht bleiben,

gültig sei, ist, daß die folgende Prüfgröße

$$\frac{\sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{q} (A_i' \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)' \cdot \left[A_i' \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n_k} \end{vmatrix} \cdot A_i \right]^{-1} \cdot (A_i' \bar{\mathfrak{z}}_i - b_i)}{\sum_{\tau=1}^{k} \sum_{i=1}^{p_\tau} \sum_{\nu=1}^{n_\tau} (x_{i\nu}^{(\tau)} - \bar{x}_{i\cdot}^{(\tau)})^2}$$

$$\sim F_{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, , \, \sum_{\tau=1}^{k} p_\tau \cdot (n_\tau - 1)}$$

verteilt ist.

5. Literaturverzeichnis

G. C. Chow: " Tests of Equality between sets of coefficients in two linear Regressions", Econometrica, Vol.28, p. 591- 605, 1960.

C. R. Rao: " Linear Statistical Inference and Its Applications"
John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961.

F. A. Graybill: " Introduction to Linear Statistical Models"
Mc Graw- Hill, New York, 1961.

A. M. Mood & Graybill: " Introduction to the Theory of Statistics"
Mc Graw- Hill, London, 1963.

Druck:

DISSERTATIONSDRUCKSTELLE
der Ernst-Reuter-Gesellschaft
der Förderer und Freunde
der Freien Universität Berlin e. V.
Pächter: Franz Augustin
1 Berlin 33, Garystr. 45